OLA HELENIUS & GÖREL STERNER

Hur många ryms i klassrummet?

En introduktion till areabegreppet

Area är ett begrepp som tar sin utgångspunkt i en konkret problemställning om storleksbestämning av ytor. Vid introduktion av areabegreppet kan det vara lämpligt att fundera på vilka egenskaper ett sådant storleksmått bör ha.

Area är ett begrepp som redan ett litet barn har en intuitiv uppfattning om men som samtidigt innehåller många inbyggda svårigheter som inte riktigt behandlas förrän inom högskolans matematik, och kanske inte ens då.

Intuitivt är vi alla överens om att arean av en plan yta är ett slags mått på dess storlek. Men hur skall vi definiera denna storlek? Hur skall den mätas? Hur kan vi räkna ut den? Det finns ett antal olika svar på dessa frågor, men det de alla har gemensamt är att de ger en koppling mellan vår intuitiva uppfattning om vilka egenskaper begreppet area bör ha och den matematiska definitionen av begreppet. I denna mening illustrerar areabegreppet på ett bra sätt relationen mellan våra behov att hantera konkreta problem och nödvändigheten av abstraktion för att skapa en tillräckligt stor generalitet hos begreppet.

I skolan introduceras ofta areabegreppet genom att man börjar studera och beräkna arean av diverse rektanglar. Arean definieras som basen gånger höjden. Detta är (som vi skall se) ingen dålig definition och i själva verket kan denna på ett intrikat sätt generaliseras till att omfatta även mycket komplext formade ytor, t ex via det integralbegrepp som vanligtvis introduceras på gymnasiets D-kurs (Riemannintegralen). Risken med att introducera area via rektanglar på detta sätt är möjligen att eleven fastnar i proceduren att räkna ut area istället för att förstå vilka geometriska egenskaper som är grundläggande för areabegreppet. Utan denna geometriska förståelse av begreppet blir det svårt både att lösa elementära problem och att senare gå vidare och förstå hur areabegreppet generaliseras till allt vidare klasser av ytor.

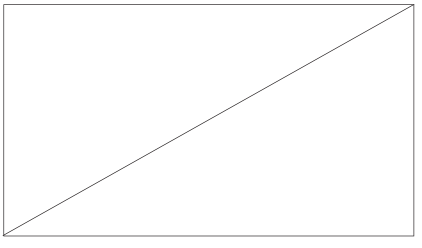
Vilka är då de grundläggande geometriska egenskaperna som areabegreppet vilar på? Jo, det visar sig att vi kan bryta ned dem i tre utsagor som alla härstammar från vår intiutiva idé om vilka egenskaper som ett mått på en ytas storlek bör ha:

1. Om en yta är helt innehållen i en annan så är arean av den första mindre (eller lika med) arean av den andra.
2. Om två figurer är sådana att man kan få den ena genom vridningar, förflyttningar och speglingar av den andra (de är *kongruenta*) så har de samma area.
3. Om man delar en figur i två delar så är summan av delarnas areor lika med arean av helheten.

Dessa tre påståenden visar sig precis räcka för att definiera ett areabegrepp som överensstämmer med vår intuition och blir praktiskt användbart. Dock saknas någon slags kvantifiering av begreppet och vi måste lägga till:

4. Arean av en rektangel är basen gånger höjden.

Med dessa fyra karakteriseringar av area klarar vi oss ganska långt. Vi använder t ex 2, 3 och 4 för att beräkna arean av en triangel. Om vi för enkelhetens skull tar en rätvinklig triangel kan den ses som hälften av en rektangel med samma bas och höjd som triangeln.



Den övre triangeln är kongruent med den undre och därmed har de två trianglarna samma area (punkt 2). Eftersom summan av dessa två areor skall vara densamma som rektangelns area (punkt 3), dvs basen gånger höjden (punkt 4), måste triangelns area vara just basen gånger höjden genom två.

På liknande sätt kan man nu se att denna formel gäller alla trianglar och genom att se att alla polygoner (månghörningar) kan delas upp i ett antal trianglar kan vi beräkna arean på alla dessa. För att kunna definiera arean av andra figurer, t ex cirkeln, behövs ett lite tyngre matematisk artilleri, men de fyra påståendena ovan är fortfarande de viktigaste principerna.

Arean i klassrummet

Klassrumsuppgiften nedan är avsedd att användas t ex i samband med introduktionen av areabegreppet. Den fokuserar på att skapa (eller möjligen förankra och formalisera) en intuitiv bild av främst punkt 2 och 3 ovan.

> Hur många personer får plats på klassrummets golv förutsatt att alla står upp?

En lämplig inledning är att eleverna enskilt funderar på olika lösningsförslag och sedan diskuterar en kort stund två och två hur de skulle vilja lösa problemet. Därefter kan vi ha en gemensam diskussion i klassen där alla idéer får komma fram.

En idé som läraren försiktigt kan lyfta fram om ingen annan gör det, är att uppskatta hur många som får plats på ett mindre område och sedan använda det som referensmått. En viktig fråga blir hur tätt personerna ska stå, om det bara är barn som vi räknar med och så vidare. När alla har gjort sina uppskattningar kontrollerar eleverna hur dessa stämmer med verkligheten genom att markera ett mindre område där så många som möjligt placerar sig. Sedan görs en ny uppskattning utifrån det nya referensmåttet och därefter kontrolleras även det. Ett förslag är att rita upp referensmåttet i full storlek på kartong och sedan kontrollera hur många sådana enheter som krävs för att täcka golvets area.

En bra fortsättning av denna uppgift kan vara att arbeta med tesselleringar och sedan lösa problem där eleverna också ska mäta areor med standardiserade måttenheter. Se även Karin Wallbys artikel i Nämnaren 4, 1996.

LITTERATUR

Wallby, K. (1996). Uppslaget: Tessellering. *Nämnaren* 4 s 26-28.