

Perspektiv på Number sense och taluppfattning

Barbara J. Reys & Robert E. Reys

I USA har matematiklärarföreningen, NCTM tagit initiativ till ett omfattande arbete med att reformera skolmatematiken. En mängd rapporter och skrifter har publicerats. I den här artikeln redogörs för Number sense, som är ett nyckelbegrepp i måldokumentet Standards. I de svenska kursplanerna i matematik enligt Lpo 94 och Lpf 94 betonas att man bör sträva efter en god taluppfattning. Är det samma sak som Number sense?

Number sense – taluppfattning

I Standards (NCTM 1989) talas mycket om begrepp som *Number sense*, *Operation sense* och *Intuitive understanding of number* för att beskriva en svårdefinierbar kvalitet, som behärskas av elever med framgång i sina matematikstudier. En god taluppfattning (Number sense?) ger en intuitiv känsla för tal och hur de tolkas och används. Den underlättar värdering av noggrannhet vid beräkningar, ger förmåga att upptäcka räknefel vid uppskattning och sunt förnuft vid användning av tal. (Howden 1989; McIntosh, Reys and Reys 1991). Number sense är inte ett avgränsat kunskapsområde som en elev behärskar, utan snarare ett kunnande som utvecklas och mognar med erfarenhet och kunskaper. Den utvecklas inte av en tillfällighet. Att man är skolad till att hantera tal återspeglar inte nödvändigtvis denna bekantskap och förtrolighet med tal. Framförallt kännetecknas Number sense av en önskan att

ge mening åt situationer med kvantitativa beskrivningar, att relatera tal till sammanhang och undersöka vad som händer när man manipulerar med tal. Det är ett sätt att tänka som borde genomsyra all undervisning och allt lärande i matematik.

Idén om Number sense är inte ny. Så tidigt som på 1930-talet var W. Brownell intresserad av vad han kallade ”meaningful learning”. För Brownell var kännetecknen på lärande i matematik inte förmågan att räkna, utan att man hade ”intelligent grasp [of] number relations and the ability to deal with arithmetical situations with proper comprehension of their mathematical as well as their practical significance” (1935). Han betonade vikten av att undervisningen är omsorgsfullt planerad för att ta upp innebörder i olika beräkningar och för att barn ska se det meningsfulla i relationer mellan tal och operationer.

Kanske Number sense på samma sätt som common sense beskrivs bäst genom att titta på kännetecknen hos dem som uppskattar och använder begreppet.

En elev med Number sense

- *tittar på ett problem i sin helhet, innan han/han går in på detaljer.*

Exempel: Vid beräkning av $12 + 29 + 8$ ($1 \frac{2}{3} + 3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}$), kan man i huvudet tänka sig termerna i ordning $12 + 8 + 29$ ($1 \frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} + 3\frac{3}{4}$) för att direkt lägga ihop 12 och 8 ($1 \frac{2}{3}$ och $1\frac{1}{3}$).

Barbara och Robert Reys undervisar på University of Missouri-Columbia, USA och är gästprofessorer vid Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet, vårterminen 1995. De arbetar med forskning och utvecklingsarbete kring begreppet Number sense och olika beräkningssätt inklusive miniräknare, huvudräkning och överslagsräkning.

Översättning av **Gunilla Svensson** och bearbetning av **Göran Emanuelsson**.

- *letar efter samband mellan tal och operationer och tar hänsyn till ett problems sammanhang.*

Exempel: Vid köp av 4 böcker för 39 kr styck, så kan eleven med 200 kr se att hon har tillräckligt med pengar, eftersom varje bok kostar mindre än 50 kr (en halv hundralapp).

- *väljer eller hittar på en metod som stämmer med den egna förståelsen av sambandet mellan tal, eller mellan tal och omvärld och strävar efter den mest effektiva representationen eller tolkningen av den givna uppgiften.*

Anta t ex att åtminstone 75% av en klass med 30 elever behöver komma överens om ett förslag angående en skolresa, innan den kan bli definitiv. En elev skulle kunna resonera: "75% är 50% plus 25%, eller hälften plus hälften av hälften. Så 15 + 8, eller 23 elever måste samtycka."

- *använder hållpunkter, "benchmarks", för att bedöma tals storlek.*

Exempel: $\frac{2}{5}$ av 49 är mindre än hälften av 49.

- *känner igen orimliga resultat på uträkningar när man på vanligt sätt reflekterar över svar.*

Exempel: $3,2 \cdot 4,8$ kan omöjligt bli 153,6. Svaret måste vara ungefär $3 \cdot 5$ eller 15, så det måste vara fel på decimaltecknets placering.

Number sense är alltså inte något nytt område i ett redan fullt matematikprogram. Det är snarare ett viktigt perspektiv från vilket man kan betrakta kunnande och lärande i matematik. Number sense är såväl elevens förmåga att göra logiska kopplingar mellan ny information och redan förvärvad kunskap som en drivkraft hos den lärande att ge dessa samband företräde.

Number sense uppmärksammas och uppskattas av elever bara om lärare tror och visar att det är viktigare att se meningen med den matematik man lär sig, än att bara använda men inte förstå regler och algoritmer. Elever skaffar sig Number sense om

de engageras i målinriktade aktiviteter som kräver av dem att tänka på tal och numeriska samband och att göra kopplingar med kvantitativ information i omvärlden.

Lärarens roll

Number sense kräver att den lärande har en positiv attityd till att skapa mening i det han/hon gör. Undervisningen kräver medvetna ansträngningar att bygga upp samband och förståelse. Lärare spelar en mycket viktig roll i att utveckla Number sense i klassrumsmiljön, i aktiviteter, i valet av arbetssätt och arbetsformer.

Att ställa frågor

Frågor som kräver mer än ett enkelt faktasvar stimulerar till diskussion, som kan leda till ytterligare utforskning och användning av resonemang för att motivera och bestyrka en tanke.

L: Jag tänker på två bråk. Summan ligger mellan 0 och 1. Vad kan ni säga mig om bråken?

Greger: Båda bråken är små, kanske mindre än 1.

L: OK, något mer?

Greger: Är båda mindre än $\frac{1}{2}$?

L: Bra fråga, kan någon svara på det?

Petra: Båda behöver inte vara mindre än $\frac{1}{2}$. Ett kan vara $\frac{3}{4}$ och det andra väldigt litet, som $\frac{1}{10}$.

Greger: OK, men om ett är större än en halv, måste det andra vara mindre än en halv.

L: Bra påpekande. Kan någon säga mig något annat om mina bråk?

Nadja: Om deras summa är mindre än 1, är deras produkt också mindre än 1.

L: Vad anser ni andra om det påståendet?

Lärarens frågor driver eleverna att undersöka olika exempel och att bevisa eller vederlägga sina första tankar. Reflektionen över samband mellan svar och process bör värderas högre än svaret. Läraren antar den betydelsefulla rollen att ställa frågor, som gör att eleverna fortsätter att fundera och

uppmuntrar andra elever att bli engagerade i förloppet. I aktivitet A ges frågor relaterade till räkning med bråk. Dessa kan användas vid diskussion och undersökningar.

Utveckling av Number sense för med sig en inställning att kvalitet går före kvantitet vid lösning av problem. Det viktigaste är att förstå ett givet problem genom att se på det från många perspektiv, snarare än att försöka bearbeta så många problem som möjligt under en given tidsperiod. Eleverna ska kunna motivera sina strategier och fråga sig: "Är detta rimligt?" när de överväger och reflekterar över svar. Se aktivi-

tet B som illustrerar behovet att se samband och göra generaliseringar.

Skriva uppsatser

Att låta elever sammanfatta sitt tänkande i skriven form är en effektiv metod för att hjälpa dem att analysera och utveckla sin uppfattning av tal. Elever kan skriva om resultat från gruppverksamhet, föra anteckningar där de bokför idéer som kommer fram i uppgifter. Medan de skriver, kan de formulera nya idéer eller frågor, som kan ge bakgrund för ytterligare frågeställningar och diskussioner. När de senare läser igenom sina journaler, kan de se hur deras uppfattningar ändras och utvecklas genom undersökningar och diskussion. Följande utdrag från en femteklasselevs anteckningar illustrerar hur barn skulle kunna dokumentera sina tankar:

1 dag kom jag underfund med att jag inte kan räkna till 1 000 000 på en dag. Det skulle ta mig mer än tio dagar och jag skulle vara tvungen att räkna hela natten utan att stan-na. En miljard är mycket större än jag trodde. Jag undrar hur lång tid det tar att räkna till en triljon?

Elever uppfinner egna metoder

Att skapa och utforska egna metoder för att beräkna och lösa problem är ett kraftfullt verktyg att utveckla meningsfull taluppfattning. I ett senare skede när standard-algoritmer introduceras så kan dessa ses som ännu ett medel att producera meningsfulla svar.

I ett klassrum där förståelse och mening har förtur blir lärare handledare och diskussionsledare, istället för förmedlare av färdiga regler och verktyg. Målet "ett enda riktigt svar" från "en uppställd algoritm" byts mot målet att ta fram flera lösningsstrategier, som genereras av och är meningsfulla för eleverna. Betoningen förskjuts från produkt till process.

När elever får frihet att använda strategier som är intuitivt uppenbara, hjälper vi dem att känna sig tryggare med problem-

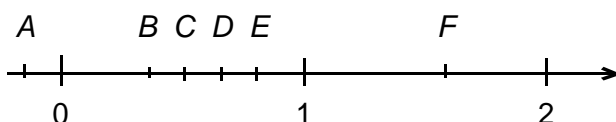
Aktivitet A: Bråk mellan 0 och 1

Denna aktivitet ska klargöra elevers förståelse för bråk mellan 0 och 1. Den kan t ex användas som en uppvärmning i början av en matematiklektion. Flera frågor har mer än ett korrekt svar.

1. Ange ett bråk mellan $1/2$ och 1 .
2. Ange ett annat bråk än $2/4$ som ligger mellan $1/4$ och $3/4$.
3. Ange ett bråk mellan $1/4$ och $1/2$ vars nämnare är 10.
4. Ange ett bråk mellan $7/8$ och 1 . Hur många kan du ange?
5. Ange ett bråk mellan 0 och $1/10$ vars täljare inte är 1.

Aktivitet B: Operationer med bråk

Denna aktivitet är avsedd att utveckla elevers förståelse för vad olika räkneoperationer har för effekt. Ställ frågor utifrån en tallinje som den nedan eller andra du kommer på. Uppmuntra eleverna att motivera sina svar genom att förklara sina resonemang.



1. Tänk dig att bråken som svarar mot punkterna D och E multipliceras. Var på tallinjen hamnar produkten?
2. Bråken som representeras av punkterna C och D multipliceras. Var hamnar produkten?
3. Bråken som svarar mot punkterna B och F multipliceras. Var hamnar produkten?

lösningsprocessen. De gör matematiken till sin egen på ett sätt som verkar rimligt för dem. Det hjälper dem också att uppskatta standardalgoritmers effektivitet.

Använd lämpliga hjälpmedel

Number sense gynnas genom att alla elever lär sig utföra beräkningar på olika sätt, med skriftliga metoder, i huvudet, med överslagsräkning och med hjälp av miniräknare. Genom att visa elever nyttan av överslagsberäkningar i vardagsituationer, betonas värdet av att göra uppskattningar, se Aktivitet C.

Både huvudräkning och uppskattning ger tillfälle till uppfinningsrikedom och beredskap för att se orimliga svar. Vid beräkningen av t ex 5×96 , kan en elev ändra problemet till $10 \times 96/2$, en annan kantänka $5 \times 8 \times 12$, medan en tredje kan använda distributiva lagen och beräkna $(5 \times 90) - (5 \times 6)$ eller $(5 \times 100) - (5 \times 4)$. Genom att sätta sig in i frågor och konkreta motsvarigheter kan detta användas till att påbörja utforskningen av alternativa metoder för huvudräkning. Efter att ha gett eleverna uppgiften 25×49 kan läraren t ex fråga: Kan någon ge ett problem med den här beräkningen genom att sätta in ordet fjärdedel i stället för 25? Hur?

Miniräknare spelar en viktig roll som effektivt redskap i en klassrumsmiljö där man betonar undersökande arbetssätt. Genom att använda räknare för att utföra tråkiga uträkningar och tester, kan eleverna koncentrera sig på processen att ställa upp en lösning och på svarets betydelse snarare än på hur det räknas ut. Elever kan vara ivrigare att utforska tals egenskaper när räknare är tillgängliga. Anta t ex att läraren ställer följande fråga: *Vad händer när man multiplicerar ett positivt heltal med ett tal med en decimal mellan 0,9 och 1,1? Använd miniräknare för att undersöka frågan, kom med ett påstående och gör en lista av exempel som stödjer detta.* Eleverna uppmuntras att skapa många exempel och dra slutsatser på grundval av exemplen, jfr aktivitet D.

Aktivitet C: Exakta tal och närmevärden

Be eleverna undersöka bruket av ungefärliga och exakta tal i tidningsartiklar. Aktiviteten kan användas för att eleverna ska få en uppfattning av och kunna värdera den dagliga användningen av beräkningar.

Ge elever kopior på förstasidor. Be dem ringa in tal som används i rubriker och artiklar. Låt eleverna granska det sammanhang där talen används, för att bestämma om det är ett exakt eller ungefärligt värde/närmevärde.

Exempel: Är talen i rubrikerna nedan exakta eller ungefärliga värden, närmevärden?

USA:s folkmängd uppgår till 220 miljoner

Lotterivinnare får in 1 200 000 årligen

Börsen föll 5,4 procent igår

40 367 betalande på årets match

Aktivitet D: Multiplikation med tal nära 0, 1/2 och 1

Denna aktivitet ska hjälpa eleverna att undersöka effekten av att multiplicera med tal i decimalform som ligger nära 0, 1/2 och 1. När eleverna ställt upp och beräknat sina exempel med en räknare kan man uppmuntra dem att göra generaliseringar från mönstret som uppstår.

Vad händer när...?

Vad händer när du multiplicerar med ett tal som är mindre än 1? Be elever att utforska detta genom att fullborda tabellen

Välj heltal	Multiplicera med 0,05	Multiplicera med 0,48	Multiplicera med 0,9
-------------	-----------------------	-----------------------	----------------------

Frågor att ta ställning till:

1. Vad händer när du multiplicerar ett heltal med 0,05?
2. Vad händer när du multiplicerar ett heltal med 0,48?
3. Vad händer när du multiplicerar ett heltal med 0,9?

Hjälp eleverna att skaffa sig hållpunkter

Ungefärlig beräkning eller uppskattning är ett annat viktigt redskap där elever kan uppmuntras att använda det de redan vet om tal, för att ge mening åt nya numeriska situationer. Det betyder att elever ofta an-

vänder sina egna hållpunkter för att bedöma en situations rimlighet. En elev som använder en gradskiva för att mäta en 30° -vinkel läser knappast på fel skala och rapporterar 150° som mått om hon har en 90° -vinkel som referens. En elev som har uppmuntrats att skaffa sig erfarenheter av bråk nära 0, $1/2$ och 1 kan förstå att $2/5 + 4/9$ bör bli mindre än 1, eftersom båda bråken är mindre än $1/2$. (Aktivitet E och F ger exempel på användning av hållpunkter.)

Att uppmuntra elever att utveckla och använda hållpunkter eller referenser, är ett sätt att hjälpa dem att utveckla bättre begreppsmässig förståelse för tal i bråkform och decimalform samt procent. Den intuitiva förståelsen bör prioriteras och tas upp innan räkneoperationerna med bråk, decimalform och procent behandlas.

Uppmuntra eleverna att ställa frågor

En viktig roll för lärare som arbetar med utveckling av Number sense är att hjälpa elever att lära sig ställa nyckelfrågor före, under och efter lösningsförloppet. Vilken typ av tal kan jag vänta mig som svar till detta problem? Ungefär hur stort kommer svaret att bli? Vilket är det största respektive det minsta värdet jag kan vänta mig? När beräkningen är klar bestämmer eleverna om svaret stämmer med det förväntade. Denna process med reflektion kan hjälpa elever att bli känsliga för storleksfel och undvika att göra samma beräkningsmiss tag en andra gång vid kontroll av svar.

Medan elever undersöker frågorna i aktivitet G, kan de uppmuntras att förutsäga vad som händer när ett tal multipliceras eller divideras med ett tal nära 1. När gissningar görs kan de snabbt bli bekräftade eller vederlagda med hjälp av räknaren.

Eleverna kan studera resultat genom att multiplicera eller dividera med ett tal större eller mindre än 1, formulera och kontrollera gissningar. I en grupp där Number sense prioriteras, är elever aktiva deltagare som delar antaganden, resonemang och slutsatser.

Klassrumsmiljön bör uppmuntra elevens undersökande, ifrågasättande, verifierande och förståelseinriktade arbetsätt.

Att välja ut aktiviteter

Genom att skapa en atmosfär som uppmuntrar utforskning, tänkande och diskussion och genom att välja lämpliga aktiviteter, kan läraren ägna sig åt att utveckla Number sense i alla sammanhang med matematik. Aktiviteter som gynnar Number sense har gemensamma utmärkande drag. De uppmuntrar elever att tänka på vad de gör och att utbyta erfarenheter och tänkande med andra. De gynnar kreativitet och undersökande arbetsätt samt tillåter flera svar och olika lösningsstrategier. De hjälper elever att förstå när det är lämpligt att uppskatta eller att ge exakt svar och när man kan göra beräkningar i huvudet, med skriftliga räknemetoder eller med miniräknare. De hjälper elever att förstå matematikens regelbundenhet och se samband mellan matematik och verklighet. Processorienterade aktiviteter visar matematikens natur och ger spännande upptäckter av idéer och samband.

Aktiviteter för att stödja utvecklingen av Number sense finns presenterade i olika sammanhang (Reys et al., 1991, Burton, et al., 1993). Dessa ska inte uppfattas som "Number sense lessons" utan som idéer för att stimulera tänkandet kring frågor som kan bidra till utveckling av Number sense bland dina elever. Det är inte så att det är den speciella aktiviteten som är betydelsefull utan vad man gör med aktiviteten som bestämmer vad den ger eleverna.

Referenser

- Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. In *The Teaching of Arithmetic, tenth Yearbook of NCTM*, edited by D.W. Reeve, 19-51. New York: Teachers College, Columbia University.
- Burton, G.M., Mills, A, Lennon, C., & Parker, C. (1993). *Number sense and operations, Addenda Series, Grades K-6*. Reston, Va.:NCTM.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. In *Arithmetic Teacher* 36 (Feb 1989): 6-11.
- McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. In *For the Learning of Mathematics* 12: 2-8, 44.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: The Council.
- Reys, B. (Ed.) (1991). Developing number sense in the middle grades, *Addenda series, Grades 5-8*. Reston, Va.: NCTM.

Aktivitet E: Hållpunkter för hela tal

Vuxna använder ofta hållpunkter eller referenser för att behandla numerisk information. Genom att känna till folkmängden på en ort, kan man lättare bedöma storleken på en publik som ska närvara vid en konsert. Om en idrottsplats rymmer 1 000 personer och ryktet säger att 30 000 personer ska gå på rockkonsert, så kan man tänka sig antalet besökare som idrottsplatsen fylld 30 gånger. Syftet med denna aktivitet är att se om eleverna är medvetna om storleken av ofta använda referenser. Uppmuntra eleverna att formulera frågor och problem för att studera innebörden av dessa uppgifter.

Här är några frågor till eleverna. Be dem först att göra en uppskattning/gissning för att sedan göra en undersökning för att bättre avgöra värdet.

1. Jordens folkmängd är _____
2. Sveriges folkmängd är _____
3. Kommunens folkmängd är _____
4. Antalet elever i skolan är _____
5. Sveriges budget är _____
6. Antal levande 13-åringar i dag _____
7. Antal elever i åk 5 förra året _____
8. Ton skräp som bildas varje dag _____

Aktivitet F : Procenthållpunkter

Eleverna har nytta av diskussioner med sina kamrater medan man arbetar med denna aktivitet. Sätt dem gärna i smågrupper för att uppmuntra samarbete.

Be eleverna fundera på varje påstående och sedan välja svar från rutan. Eleverna kan fortsätta med denna aktivitet genom att gå igenom varandras svar, använda andra informationskällor eller genom att göra en undersökning.

Fullborda varje påstående nedan. Välj någon av följande uppskattningar:

0 procent	Mindre än 10 procent	Ca 25 procent
Färre än 50 procent	Ca 50 procent	Mer än 50 procent
Ca 75 procent	Åtminstone 90 procent	100 procent

Påståenden:

1. _____ av eleverna i mitt klassrum är vänsterhänta.
2. _____ av eleverna i mitt klassrum har rött hår.
3. _____ av eleverna på skolan tycker om hamburgare.
4. _____ av eleverna på min skola tycker om fotboll.
5. _____ av eleverna på min skola har tennisskor på sig idag.
6. _____ av invånarna i min kommun är över 90 år.
7. _____ av invånarna i min kommun har bil.
8. _____ av invånarna i mitt landskap är kvinnor.

Aktivitet G: Multiplikation och division av tal nära 1

I denna aktivitet uppmuntras elever att fylla i luckor genom att tänka på resultatet av operationen. Allt kan besvaras utan uträkning. Uppmuntra elever att beskriva sina tankegångar i varje uppgift och bestämma om det ska vara $<$, $=$, eller $>$ i uppgifterna. Efter att ha fullbordat alla multiplikationer, kan man göra uppgifterna med division istället. (byt ut \times -symbolen mot $/$).

1. $246 \times 1,3$ ___ 246
2. $920 \times 0,8$ ___ 920
3. $98 \times 1,001$ ___ 98
4. $32 \times 1/2$ ___ 32
5. $1/2 \times 7/8$ ___ $1/2$
6. $1/2 \times 7/8$ ___ $7/8$

Anmärkning: De flesta aktiviteterna i denna artikel är hämtade från Reys m fl (1991).