Några sidor svensk matematikhistoria

JAN THOMPSON

I en svensk matematikhistoria utgör året 1679 en naturlig gräns. Detta år utnämns till professorer vid Uppsala universitet, Anders Spole, i astronomi, och Johan Bilberg, i matematik. Därmed får den nya världsbilden samt den moderna symboliska matematiken ett genombrott i vårt land. I denna artikel behandlar *Jan Thompson* tiden före 1679.

Det är en fascinerande läsning om en spirande matematikkultur, där aritmetik, geometri och regula de tri många gånger utvecklas i kyrkans hägn. Problemlösningen verkar ganska primitiv och räknelärorna saknar helt förklaringar.

Vad menas med matematik?

Det är rimligt att man först ställer frågan: Vad menar man med ''matematik'' vid denna tid? Enligt gammal tradition, som ursprungligen går tillbaka till grekerna, bestod hela *quadrivium* av matematiska ämnen, nämligen aritmetik, geometri, musik och sfärik. Det tredje av dessa är liktydigt med musikteori, det fjärde med astronomi, eller astrologi. När någon hade titeln ''mathematicus'', gällde denna just funktionen som astronom, eller astrolog. Kepler var t ex ''kejserlig matematiker'' vid hovet i Prag. Men stundtals var termen ''matematik'' vidare än så. I Uppsala universitets konstitutioner, givna 1626 och utarbetade av den ivrige nydanaren Johan Skytte, medgavs tre matheseos-professorer. Dessa var den ''euklidiska'', innefattande aritmetik och geometri, den ''archimediska'', innefattande mekanik, optik och musikteori, samt den ''ptolemaiska'', innefattande astronomi, geografi och arkitektur. 1655 reducerades dessa till två med utökning av kompetensområdena. Också på elementarnivå var situationen annorlunda än i nutid. Vi räknar med fyra räknesätt; under medeltiden var räknesätten minst nio. Dessa var numeratio (om tals betecknande), addition, subtraktion, fördubbling, multiplikation, halvering, division, kvadratrot- och kubikrotutdragning samt progressio (gällande serier).

I fråga om matematisk litteratur var Sverige under den aktuella tiden helt beroende av situationen ute i Europa. Före 1100-talet — Sverige hade då över huvud taget ingen vetenskaplig kultur — såg det mörkt ut. Arvtagarna till det romerska imperiet mottog ingen matematisk tradition av det enkla skälet att romarna inte producerade någon matematisk litteratur. Okunnigheten var sålunda djup; man var inte ens medveten om sin okunnighet. Tillgängligt på latin för undervisning i kloster- och katedralskolor var egentligen endast någon pythagoreisk aritmetik samt enstaka euklidesfragment. Den sparsamma matematiska produktion som ägde rum under tidig medeltid var inriktad på att lära ut regler utan bevis, och skulle för övrigt så förbli under lång tid. Den tillhörde dels computuslitteraturen, en aritmetik för beräkning av kyrkliga högtider, bl a påsken, dels agrimensorlitteraturen, en geometri för lantmätarens behov.

Under 1100-talet, samtidigt med att de första universiteten växer fram, förändras läget snabbt. Stora delar av den grekiska matematiken blir känd: Euklides, Apollonios, Archimedes. Härtill kommer kännedomen om siffrorna och det fullständiga positionssystemet. Långsamt, mycket långsamt, tränger den algoritmiska tekniken undan den abakistiska. (Se Nämnaren, årg. 11.)

I vilken utsträckning fick Sverige kännedom om denna litteratur? Med kristendomen, som fick fäste mot slutet av 1100-talet, infördes den julianska kalendern och man kan anta att en del computuslitteratur jämväl en del astronomisk litteratur fanns i de bibliotek som skapades på orter som Lödöse, Uppsala, Vadstena, hopbragta vid studier vid utländska universitet.

Medeltida matematiker och undervisare

När det gäller svenskar lärda i matematik, kanske rentav med författarambition, möter oss sådana först vid 1500-talets början. Professor vid det nyinrättade Uppsala universitet var vadstenamunken Petrus Astronomus, känd som konstruktör av ett berömt urverk, förstört vid branden i Uppsala 1702. En annan vadstenamunk var den lärde Peder Månsson, vår siste kanoniskt (av påven) vigde biskop. Av denne finns bevarad en avhandling med titeln *Regule de tri.* Här ges noggranna regler för lösningen av proportionalitetsproblem.

Exempel Vad kostar 12 ona (ett vinmått), om 2 stycken säljs för 6 denarer? I lösningen ställs talen upp: 2, 6, 12. Regeln säger nu att man får det fjärde talet genom att dividera produkten av det andra och tredje med det första, alltså

$$\frac{6 \cdot 12}{2} = 36. \text{ Svar: 36 denarer.}$$

Anmärkas kan att regeln hämtats ur Euklides *Elementa,* sats 19, bok VII.

Vår första skolordning är från 1571. Om undervisning i matematik sägs ingenting. Några kända läroböcker eller texter med matematiskt innehåll, undantagandes kalendarier, finns ej bevarade. Detta sammanhänger med utbildningens låga värde i Sverige under reformationstiden. Uppsala universitet låg nere, skolorna tilläts förfalla, så att vid 1500-talets mitt "knappast fanns någon svensk, som kunde undervisa ungdomen i 'siffrorna' och deras användning vid räkenskapers förande" (Dahlin).

Med Uppsala universitets återupprättande 1595 förändras bilden. Vi får lärare i matematiska ämnen. Inte mindre än fyra filosofie professorer tillsätts, varav två i matematik. De två första, Eric Skinnerus och Laurentius Paulinus Gothus, som båda haft funktioner vid Uppsala möte 1593, föreläste över flera vetenskaper, utom matematiska som astronomi, även sådana som retorik och poesi. Vi får småningom en matematisk litteratur, dels på filosofisk nivå bestående av allmänna teser som definierar ämnet och prisar dess nytta, dels på elementarnivå, som demonstrerar matematiska operationer. Exempel på den första är ett par disputationer av Johan Skytte från 1598 och en dito framförd i Marburg 1600 av Nils Chesnecopherus med titeln *Rosarium mathematicum.* Vad beträffar läroböcker kom dessa länge i vårt land att baseras på två kontinentala inflytelserika arbeten, nämligen ett av Petrus Ramus i Paris och ett av Christopher Clavius i Rom.

Petrus Ramus, mördad under Bartolomeinatten 1572, var 1500-talets store pedagogiske reformator. Han betonade matematikens nyttoaspekter. Han fann tillämpbarheten hos Euklides geometri starkt begränsad och insåg att den skulle få ett helt annat värde om man översatte innehållet till ett algebraiskt språk. Ramus blev upphovsman till "den geometriska algebran" som kom att bli förelöpare till den *symboliska abstraktionen,* som andra skulle genomföra (se Nämnaren, nr 3, årg. 11). Ramus önskade också reformera universitetsundervisningen. Genom betoningen av matematikens praktiska syften appellerar Ramus till borgerskapet med dess hantverkare och köpmän. I termen "intellektuell kommersialism" ligger att ramismen ersätter kunskap som visdom med kunskap som nyttighet och som — handelsvara. I boktryckarkonstens nyöppnade perspektiv kan man säga att Ramus ordnar kunskapen så att säga i lösa typer. Nyproducerad kunskap, som geografi och historia, skall passas in i de gamla konsterna, som därmed måste omklassificeras, något som också Ramus företog sig. Detta är i korthet bakgrunden till de disputationer och orationer som levereras av tidens svenska nydanare. Två av dem har nämnts ovan, Johan Skytte och Laurentius Paulinus Gothus. De var båda hängivna ramister. Skytte blev 1622 Uppsala universitets kansler. Laurentius lämnade småningom universitetet och blev biskop i Strängnäs 1626, där han grundade ett gymnasium, och slutligen ärkebiskop 1637. Båda var, liksom Ramus själv, starkt kritiska till Aristoteles inflytande vid universiteten; som ärkebiskop krävde Laurentius att ingen i landet fick bli präst utan att ha läst Euklides och fysik i Ramus lärobok.

I många upplagor utkom Ramus arbete *Arithmeticae libri tres,* tryckt första gången 1555. Multiplikation definieras som upprepad addition: multiplikanden adderas lika många gånger som det finns enheter i multiplikatorn (gäller heltal). Division ses som en upprepad subtraktion (innehållsdivision): divisorn borttages från dividenden lika många gånger som divisorn innehåller enheter. Motsvarande algoritm är en variant av galärdivision (se nedan). När Ramus behöver förkorta bråk använder han sig av *Elementa* VII:2, där Euklides ger en algoritm för bestämning av största gemensamma delaren. Från *El.* VII:19 hämtas tillvägagångssättet vid regula de tri. Satsen säger att fyra tal är proportionella då och endast då produkten av de två yttersta är lika med produkten av de två mellersta. Ramus kallar detta "den gyllene regeln". Vi ser nu tydligt vad det som ovan kallats den intellektuella kommersialismen innebär. Matematiken måste ges i form av memorerbara mekaniska regler för att bli användbar för praktiska syften. Om någon förståelse är det inte tal.

Samma intryck får man vid en hastig blick i Clavius räknelära *Epitome arithmeticae practicae* från 1583, vilket inte betyder att man inte kan bli imponerad av de lösningsmetoder som presenteras. Clavius var känd som sin tids Euklides. Av påven Gregorius XIII fick han uppdraget att reformera tideräkningen. I Clavius lärobok utförs subtraktion från höger till vänster, inte som hos Ramus från vänster till höger. Multiplikation definieras kommutativt, dvs utan särskild markering av multiplikator och multiplikand. En från pedagogisk synpunkt säregen multiplikation är följande.

Exempel Vad är 7 • 8?

7 3

8 2

5 6

Man får entalssiffran i produkten genom att multiplicera respektive tals differenser med 10 (3 = 10 – 7 och 2 = 10 – 8). Tiotalssiffran erhålls antingen som entalssiffran i summan av 7 och 8 (7 + 8 = 15) eller genom att ta differenser utefter snedstrecken. Metoden återfinns i en svensk lärobok från 1630 (Ublenius). Division är hos Clavius såväl delningsdivision som innehållsdivision. Algoritmen är *galärdivisionen,* klassiskt skön.

Exempel 1 832 487 skall divideras med 469

~~1~~
~~63~~1
~~4215~~0
~~65536~~4
~~1832487~~ (3907 $\frac{104}{469}$
~~469999~~
~~4666~~
~~44~~

Nedan visas de tre första stegen.

1.

42
~~69~~5
~~1832~~487 (3
~~469~~

2.

42
~~63~~5
~~1832~~487 (3
~~469~~9
46

3.

~~1~~
~~6~~3
~~421~~
~~655~~3
~~18324~~87 (39
~~4699~~
~~46~~

Divisorn upprepas efter varje deldivision och skrivs under dividenden. Resterna skrivs ovanför dividenden. Siffrorna stryks alltefter som de begagnas.

Ett intressant exempel är följande.

Exempel Ett kar har i sin botten tre rör. Det första tömmer karet ensamt på 2 timmar, det andra på 3 och det tredje på 6 timmar. På hur lång tid töms karet om alla tre rören är öppna samtidigt? Man kan anta att genom vart och ett av rören strömmar vattnet på samma sätt i det senare fallet som när det ensamt var öppet.

För lösningen bestämmer Clavius den minsta gemensamma multipeln till 2, 3 och 6. Denna är 6. Uppställning:

Timmar	Kar	Timmar	Kar
2			3
3	1	6?	Svar: 2
6			1

På 6 timmar töms alltså sammanlagt 6 kar. Uppställning:

Kar	Timmar	Kar	Timmar
6	6	1?	Svar: 1

Lösningen är självfallet matematiskt sett ekvivalent med en addition av bråktalen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{6}$, som är respektive ''hastigheter'' i kar per timme, men *utan formalismen.* Clavius lösning är exempel på ''primitiv matematik''. Att man väljer att ta reda på vad som händer på 6 timmar är naturligt.

Hos både Ramus och Clavius förekommer något som kallas alligationsräkning. det är en sorts proportionsräkning för bestämning av blandningsförhållanden. Exemplet är hämtat från Clavius.

Exempel Ett skålpund peppar kostar 4 julier etc (se rutan). Hur mycket av varje slag skall tas för att ett skålpund av blandningen skall kosta 7 julier?

I uppställningen är ämnen vars pris är mindre än medelpriset placerade ovanför detta, medan ämnen vars pris är större än medelpriset är placerade nedanför. Nu kombineras t ex peppar med ingefära, nejlikor med saffran, kanel med ingefära (i varje par finns ett ämne ovanför och ett ämne nedanför medelpriset). Så uträknas skillnader på så sätt att vid pepparn sätts ingefärans pris minus medelpriset och vid ingefäran medelpriset minus pepparns. Etc. (Ingefäran får två skillnader eftersom den kombinerats två gånger.)

	Julier	Skillnader
Peppar	4	1
Nejlikor	3	3
Kanel	6	1
Medelpriset	7	
Saffran	10	4
Ingefära	8	3;1
		Summa 13

Svaret kan nu avläsas direkt. Man skall ta

$\frac{1}{13}$ skålpund peppar,

$\frac{3}{13}$ skålpund nejlikor etc. (Av ingefäran skall tas

$\frac{4}{13}$ skålpund.)

Självfallet finns flera lösningar, beroende på hur man kombinerar.

Den fråga som inställer sig är naturligtvis: Hur kom man på det här utan tillgång till systematisk algebra? Lösningen låter sig lätt förklaras utifrån ett obestämt linjärt ekvationssystem med två ekvationer och (här) sex obekanta, och förekomsten av alligationsräkning visar att man trots bristen på terminologi har tänkt i sådana banor.

Räkneläror på 1600-talet

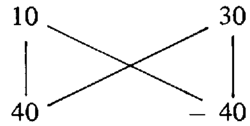
I vilken utsträckning meddelades aritmetikundervisning i vårt land under förra hälften av 1600-talet? Variationerna var stora och oenhetlighet regel. Gustav Adolf önskade en breddning av undervisningen i skolorna, svarande mot stormaktsambitionerna. Räkneskolor infördes i några städer. De första gymnasierna, med undervisning i matematik, inrättades på 1620-talet. I Västerås gavs till och med undervisning i aritmetik och geometri i trivialskolan, under överinseende av den energiske Johannes Rudbeckius — biskop där från 1619 — som vid sitt tillträde till professuren i matematik i Uppsala 1604 höll en dityrambisk oration till vetenskapens lov. På denna tid utfärdades tydligen läroplanerna retroaktivt och i 1649 års skolordning föreskrivs en ordentlig matematikundervisning. En ''skriv- och räkneklass'', avsedd för köpmän och andra som inte skulle bli präster, infördes i trivialskolan. Därmed hade skapats en efterfrågan på räkneläror på svenska språket. Den första, av Hans Larsson Rizanesander och otryckt, skiljer sig inte nämnvärt från sina kontinentala föregångare. Endast regler ges, inga förklaringar.

Den första på svenska tryckta räkneläran är författad av Aegidius Aurelius, *Arithmetica eller Räknebook,* Uppsala 1614, utkommen i nio upplagor, den sista 1705. Aurelius följer troget Ramus. Dock använder han svenska måttenheter (daler, skålpund etc). En nyhet är bruket av räknepenningar. Decimalbråk förekommer ej, ens i 1705 års upplaga. Av den symboliska matematiken, känd på kontinenten åtminstone från mitten av 1600-talet, finns heller ingenting nämnt. Den lärobok som kom att dominera elementarundervisningen ända in på 1800-talet var skriven av Nicolaus Agrelius, borgmästare i Varberg. Dess titel var *Institutiones arithmeticae,* första gången tryckt 1655, sista gången 1798. Det är anmärkningsvärt att också denna saknar såväl decimalbråk som symbolisk matematik. Ännu mer anmärkningsvärt är att dess långa livstid inte alls motsvarar dess pedagogiska förtjänster. Fortfarande inga bevis eller förklaringar! Om boken har sagts: ''Tanken på huru Sveriges ungdom i nära 200 år plågats med detta arbete och derigenom tillbakahållits i sin utveckling är i sanning förfärande. — Tanken på hvad ondt Agrelii lärobok gjort och hvad godt en god undervisning kan göra, bör vara lifvande för hvarje skolman.'' (Hultman)

Av en helt annan förtjänst är *Arithmetica eller Räkne-Book* av Matthias Andreas Biörk, utgiven i Västerås 1643. Den presenterar den 'berömlige Algebra' med Viètes beteckningar för den obekanta och dess digniteter.

Exempel Ibland några studenter inföll en fråga om en summa pengar som var och en hade. Archias sa: ''jag har 8 mark mer än Sempronius''. Men Titus sa: ''jag har så mycket själv som ni båda tillsammans och ändå 4 mark över''. Så sa Alexander: ''jag har 100 mark, vilket är lika mycket som ni har tillsammans''. Nu är frågan hur mycket var och en hade.

Låt oss först se på en klassisk lösning av typ Clavius, för att rätt kunna uppskatta den förenkling som algebran medger. En sådan lösning är av typen *regula falsi* med två antaganden. Först antar vi godtyckligt att Sempronius har 10 mark. Då har Archias 18, Titus 32 och Alexander 60 mark (summan av de tre föregående). Men han har enligt uppgift 100 mark, vilket alltså skiljer sig från 60 med 40. Detta är vår första skillnad. Antag så, också godtyckligt, att Sempronius har 30 mark. Archias har 38, Titus 72 och Alexander 140 mark, som är 40 mer än vad han skall ha. Denna andra skillnad skriver vi -40. Uppställning:



Lösningen, Sempronius penningsumma, fås genom att bilda uttrycket

$$\frac{30 \cdot 40 - 10 \cdot (-40)}{40 - (-40)} = 20.$$

Till detta gavs ingen förklaring och man undrar hur "de gamle" bar sig åt för att komma på lösningen.

Biörks lösning tillgår så, att han kallar Sempronius penningsumma ett "ting" och betecknar den "$1\surd$". Archias summa blir då $1\surd + 8$. Titus har $2\surd + 12$ och Alexander slutligen $4\surd + 20$. Eftersom Alexander skall ha 100 mark, fås ekvationen

$$4\surd + 20 = 100,$$

varav

$$4\surd = 80$$

och därmed

$$1\surd = 20.$$

Biörks insats på elementarnivå motsvaras på universitetsnivå av Martinus Erici Gestrinius, som i föreläsningar från 1640-talets början använder symboler som + och – och $\surd$. Den stevinska decimalräkningen introduceras. Gestrinius publicerar också vårt första *matematiska* arbete. Det har titeln *In Geometriam Euclidis Demonstrationum Libri VI*, Uppsala 1637.

Georg Stiernhielm som matematiker

Därmed är vi framme vid "den man, vilken måste betecknas som vår stormaktstids originellaste och uppslagsrikaste matematiska begåvning" (Lindroth). Vem var han? Till kanske mångens förvåning ingen mindre än Georg Stiernhielm, känd som "den svenska skaldekonstens fader", vars porträtt användes som vinjett till Dagens Nyheters artikelserie med anledning av humanistdagarna 1985. Just den senare omständigheten understryker vad man i äldre tider alltid vetat men nu tycks ha glömt bort, nämligen att matematiken måste räknas in bland humaniora!

Sitt matematiska intresse motiverar Stiernhielm utifrån pythagoreisk-platonska utgångspunkter. Skaparen har ordnat allt efter mått, mål och vikt. Därför är mätevisheten (matematiken) den främsta av alla konster. På samma sätt motiverar Stiernhielm också sitt intresse för meterologi, ett område där han tillhör pionjärerna i vårt land.

Stiernhielm författade åtskilliga böcker i matematik, men endast två trycktes, den ena med titeln *Archimedes reformatus* från 1644. Av större intresse i detta sammanhang är *Arithmetica mnemonica universalis*, skriven 1642. Stevin hade infört "tiondelsräkningen" i ett arbete 1585. Stiernhielm blev bekant med den 1625. Stiernhielm skriver 5,076 som 5076③ eller 5076''' och 24 som 24⓪. 1650 träffade Stiernhielm Descartes vid drottningens hov. Med dennes skrifter torde han dock inte ha varit bekant. Stiernhielms beteckningar för digniteter (potenser) av den obekanta är

$\boxed{0}$ eller N betyder 1

$\boxed{1}$ eller $\vdash\!\dashv$ betyder x

$\boxed{2}$ betyder x^2 etc

Stiernhielm använder också tecknen

" + " och "$\div$" (för minus).

Exempel $3\boxed{4} + 5\boxed{3} \div 1\boxed{2} \div 5 \vdash\!\dashv + 24$

Utsägs "3 qvadrat-qvadrater, mer 5 kuber, mindre 1 qvadrat, mindre 5 linier, mer 24".

I sin översikt "Svenska aritmetikens historia" (*Tidskrift för matematik och fysik*, 1—5, 1868—74) ger F W Hultman det omdömet av de (här) nämnda författarna att de mest framstående vetenskapligt sett är Biörk och Stiernhielm. Vi har redan mött hans negativa omdöme om Agrelius. Över huvud är det uppenbart att vårt land är, jämfört med Europa i övrigt, långt efter sin tid.

Året 1679 markerar här en gräns.