

# Vad är diskret matematik?

---

*Det finns exempel på delmoment i diskret matematik som passar bra på mellanstadiet, säger universitetsmatematiker. I dag finns exempel med litet här och var i skolans kursplaner och mer systematiska studier föreslås i t ex Standards (se s 17). Här belyses området av högskolelektor **Thomas Weibull**, som bl a arbetar i lärarutbildningen vid Göteborgs universitet.*

---

## Allmänt om diskret matematik

Namnet på denna gren av matematiken brukar ge upphov till en del ganska uppenbara lustigheter, men har naturligtvis ingenting att göra med att dess utövare skulle vara mindre burdusa än andra, utan är avsett att göra skillnad mot matematik som sysslar med kontinuerliga variabler och gränsprocesser som derivata och integral. På engelska stavas för övrigt ordet diskret olika i de två betydelseerna — Discrete Mathematics, a discreet person. Diskreta variabler har förstås studerats förr. Algebra och talteori är klassiska områden. Beteckningen *diskret matematik* är dock av relativt sent datum och avser snarast datorrelaterad matematik, dels sådan matematik som lämpar sig för datorbehandling, dels sådan matematik med vilken man kan beskriva vad datorer kan göra.

Typiska områden i diskret matematik är logik, boolesk algebra, konstruktion och analys av algoritmer, rekursiva talföljder, kombinatorik, grafteori, algebraiska strukturer, grammatiker (formella språk), (abstrakta) maskiner med ändligt många tillstånd (finite state machines).

Att ämnet blivit etablerat på universiteten kan bl a ses på den stridande strömmen av amerikanska läroböcker som snart kan mäta sig med Calculusfloden, och nu framhålles det i NCTM:s STANDARDS, som ett av de områden som bör betonas starkare. I en tidigare artikel i Nämnaren, 15/2, sid 71—74, har Torgny Domar berättat om grafteori, som kanske är den del av den diskreta matematiken som lättast låter sig introduceras i skolan. Allmänt är dock området tacksamt för problemlösning då det ger utrymme för fantasi och uppfinningsrikedom utan stora krav på förkunskaper. Jag vill här ge några exempel.

## Induktion

Den kanske mest närliggande diskreta strukturen är de positiva heltalen. En grundläggande metod att bevisa att ett visst påstående gäller för alla positiva heltal  $n$  är induktion, som består av två steg:

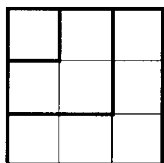
- I. Påståendet verifieras för  $n = 1$ .
- II. Man visar att *om* påståendet gäller för ett visst heltal  $n$  så gäller det även för nästa heltal  $(n + 1)$ .

Att detta ger påståendets sanning för alla positiva heltal  $n$  garanteras nu av *induktionsaxiomet* som vi accepterar som en grundläggande sanning om heltalen; intuitivt ser man att I ger oss startpunkten och II för oss vidare från en redan uppnådd punkt till nästa punkt, som i sin tur blir utgångspunkt för nästa steg osv. Vi tar ett exempel:

Kanske har man observerat att

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \end{aligned}$$

eller ritat figurer som



och därför fått anledning att tro på att *summan av de  $n$  första udda talen är lika med  $n^2$* , men att detta stämmer i de första tre fallen är ju knappast tillräcklig grund för att hävda att

$$1 + 3 + 5 + \dots + 999 = 500^2.$$

I varje konkret fall kan man förstås (låta en dator) räkna ut båda leden men det ger inte mycket hjälp när det gäller det allmänna påståendet.

Låt oss därför göra ett ordentligt bevis.

De  $n$  första udda talen är

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 1 - 1, \\ 3 &= 2 \cdot 2 - 1, \\ 5 &= 2 \cdot 3 - 1, \\ &\dots, \\ 2 \cdot n - 1, \end{aligned}$$

så vårt påstående är att

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

för alla positiva heltal  $n$ .

I. Vi har redan sett att påståendet är sant för  $n = 1$ .

II. Vi antar nu att påståendet är sant för ett visst värde på  $n$ , dvs att

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

för detta  $n$ .

Det gäller nu att visa att påståendet i så fall är sant med  $n$  ersatt av  $(n + 1)$ , dvs att

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \\ = (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Men enligt vårt antagande är detta ekvivalent med att:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

vilket ju är en välkänd identitet, så påståendet gäller för  $(n + 1)$ .

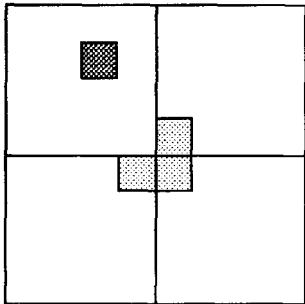
I och II ger nu att påståendet gäller för alla positiva heltal  $n$ .

I vårt exempel finns andra bevismetoder, t ex formeln för en aritmetisk summa, men det är väl tydligt att induktion är en kraftfull metod och jag minns vilken glädje det var när jag första gången mötte den som gymnast i Polyas "How to Solve it".

Induktion kräver variabelvana och är kanske ingenting för grundskolan, men själva principen att behandla ett nytt fall med hjälp av ett tidigare avklarat är värdefull i all problemlösning. Låt mig illustrera med en geometrisk uppgift, som för övrigt kan göras som ett konkret läggspel:

Tag ett "schackbräde" av storlek  $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16 \dots$

Du har till ditt förfogande L-formade bitar bestående av tre rutor av samma storlek som på schackbrädet. Låt nu någon peka ut en av rutorna på brädet. Din uppgift är att lägga ut L-bitarna så att de precis täcker alla de andra rutorna.



*Lösning:* Dela brädet på mitten i båda riktningarna. Detta ger fyra bräden av närmast mindre storlek. Den förbjudna rutan ligger i ett av dem, så om vi vet hur problemet skall lösas för den mindre storleken kan vi nu täcka den fjärdedelen med L-bitar. Återstår de tre andra fjärdedelarna, som bildar ett stort L. På dem är ju ingen ruta spärrad så vad gör vi? Jo: lägg en L-bit med sitt inre hörn i det stora L:ets inre hörn, med andra ord i det stora brädets mittpunkt. Detta tar en ruta från var och en av de tre fjärdedelarna och resten av dessa kan nu täckas om vi har en lösning för den storleken. Har vi det inte, upprepar vi samma halveringsprocedur tills vi kommer ner till delar av storleken  $2 \times 2$ . I var och en av dessa är en ruta redan upptagen, antingen genom att det är den förbjudna rutan eller genom att vi lagt en L-bit där. Men ett  $2 \times 2$ -bräde med en ruta borta är ju just ett L, så nu kan vi utan vidare lägga ut resten av L-bitarna.

Det är värt att lägga märke till att induktionssteget i detta exempel, till skillnad från det föregående, ingalunda är automatiskt, den avgörande konstruktionen — placeringen av den första L-biten — måste problemlösaren själv bidra med. Detta är förstås alltid fallet i bevis som inte bara är verifikationer.

## Kombinatorik

Något förenklat kan kombinatorik sägas handla om att beräkna på hur många sätt en viss händelse kan inträffa. T ex hur många Lotto-rader finns det? Det gäller här att välja 7 tal av 35. Det första talet kan väljas på 35 sätt, det andra på 34 sätt, det tredje på 33 sätt osv. Totalt  $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$  sätt att välja 7 tal bland 35 i en viss ordning. Emellertid spelar det ingen roll i vilken ordning man valt de 7 talen och vi måste därför dividera med de  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  sätt på vilka man kan ordna 7 tal. Alltså är antalet

$$\frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 34 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 29 = 6\,724\,520$$

Exemplet illustrerar *multiplikationsprincipen*: antalet sätt att utföra en viss procedur är produkten av antalet sätt att utföra de olika stegen i proceduren, förutsatt att dessa antal är oberoende av vilka val som gjorts i tidigare steg. Att en allmän insikt om att det nära nog finns en Lottorad per svensk medborgare skulle leda till ett minskat spelande är nog för mycket att hoppas på när kvällstidningarna kan ha bilagor där man på fullt allvar (?) diskuterar chanserna för de olika talen i veckans omgång.

En annan grundläggande princip är *Dirichlets lådprincip* som i all sin enkelhet säger att om man skall lägga föremål i lådor och har fler föremål än lådor så måste minst en låda få mer än ett föremål. Mera allmänt: om antalet föremål är mer än dubbelt så stort som antalet lådor måste någon låda innehålla minst tre föremål osv.

En välkänd tillämpning är problemet med bruna och svarta strumpor. Det räcker med tre strumpor för att vara säker på att få två av samma färg. Eller, som i introduktionsprogrammet till TV:s serie om fortbildning i matematik: Om man har handskar i tre färger räcker det att ta fyra stycken för att få två i samma färg. Ända sedan dess har jag undrat vad programledaren tänkt sig att man skulle ha för nytta av två svarta vänsterhandskar. Jag kan inte påminna mig att det sades att man hade precis tre par handskar — i så fall gäller ju att de två likfärgade handskarna går till var sin hand, och fyra är även minimiantalet för att säkerställa att man får minst en vänster- och en högerhandske.

Här följer en något djupare tillämpning av lådprincipen. I varje sällskap om sex personer finns tre som alla träffats förr eller tre av vilka ingen träffat någon av de andra förut. För att visa detta, låt A vara en av de sex personerna. De övriga fem fördelar vi på två "lådor": de som träffat A förut och de som inte gjort det. Någon av dessa lådor innehåller minst tre personer, låt säga den första. Om två av dessa träffats förut, utgör de tillsammans med A en sådan grupp som vi söker. Annars har inga av de tre träffats förr och vi har åter funnit vad vi sökte. Om istället minst tre personer *inte* träffat A förut tillämpar vi det analoga resonemanget på dem.

Det kan tyckas som om argumentet bara använder sig av fyra personer, A och de tre övriga. Det är emellertid ganska lätt att se att om man bara har fem personer från början så behöver det inte finnas någon homogen grupp om tre som ovan.

Det enklaste sättet att behandla detta problem är nog grafiskt. Om man förbinder sex punkter med streck som är antingen röda eller blå får man alltid minst en enfärgad triangel, medan däremot fem punkter kan förbindas med streck av två färger utan att en enfärgad triangel uppstår. Denna formulering av problemet har den fördelen att det blir naturligt att rita figurer för att understödja tänkandet — prova själv.

Låt mig sluta med att nämna en "riktigt nyttig" övning ur *Applied Combinatorics* av Alan Tucker (2nd ed, Wiley, New York 1984) med vilken man t ex kan nå det vällovliga syftet att imponera på sina barn. I leksaksaffärer finner man tankenöten Instant Insanity. Den består av fyra kuber där varje sida har en av fyra färger, och det gäller att bygga en stapel av kubernas så att var och en av stapelns fyra sidor innehåller alla fyra färgerna. Den som bara leker med kubernas på måfå finner snart att uppgiften inte är lätt, men med den grafteoretiska modell som presenteras i boken kan man lösa den på några minuter.

Den som vill veta mer om diskret matematik kan studera någon av de böcker som Torgny Domar nämnde i sin artikel eller Kenneth H Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, Random House, New York, 1988, som är den lärobok som för närvarande används vid Göteborgs universitet.