PESACH LAKSMAN

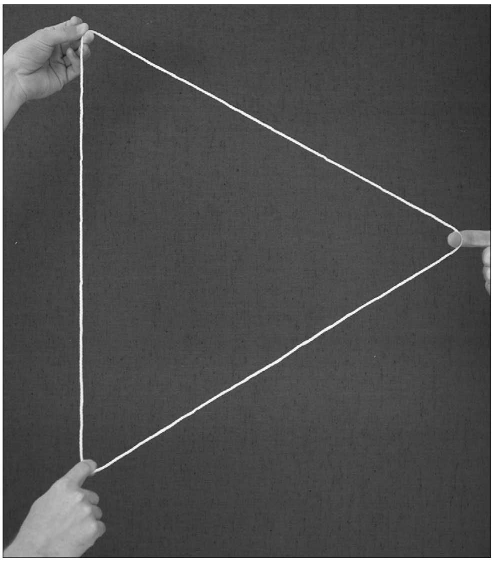
Geometri med snöre

Vilket samband råder mellan omkrets och area för de enkla geometriska formerna triangel och rektangel? Vi får här ta del av ett sätt att arbeta sig fram till vissa resultat med en laborativ metod.

När 13-åriga elever får frågan vad area betyder ger de mestadels svar som antyder hur man tar reda på arean av vissa geometriska figurer. Istället för att förklara begreppets innebörd beskriver eleverna en procedur. Det vanligaste svaret lyder ”längden gånger bredden” – en tydlig koppling av areabegreppet till rektanglar. Att så är fallet är kanske inte så förvånande med tanke på att man försöker omforma andra figurer till rektanglar när man beräknar dess areor, och detta är även vanligt i läroböcker. Ändå kan det inte vara ändamålsenligt att bygga ett begrepp genom att mäta och räkna. Kan man däremot få eleverna att uppleva begreppet och utveckla intuitiv förståelse blir de mer förtrogna med det de lär sig.

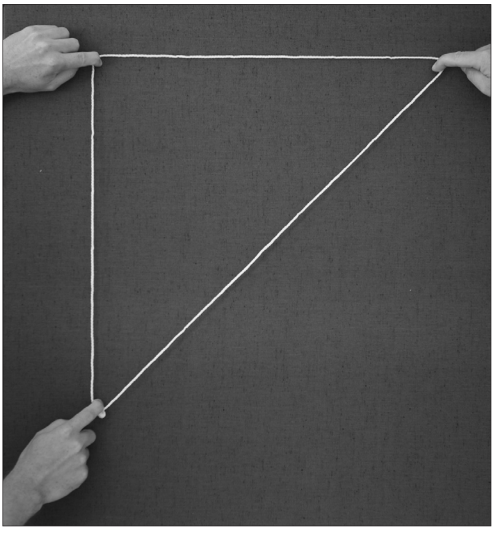
Lek med en triangel

Låt dina elever tänka sig var sin triangel, vilken som helst. Be en elev avslöja sidornas längder i sin triangel. Be eleverna att behålla omkretsen men ändra sidorna så att varje triangel får maximal yta. Den övningen upplevs som svår. Du får antagligen olika svar, med låg grad av övertygelse – om det överhuvudtaget kommer några. Då kan det vara dags att tillgripa ett hjälpmedel i form av ett snöre vars ändar är sammanknutna. Låt eleverna arbeta i grupper om två eller tre och be dem forma en triangel av snöret. När de flyttar de tre punkterna ser de en dynamisk triangel vars area ändrar sig medan omkretsen förblir konstant.



Nu kan du vänta dig svar från samtliga grupper med hög grad av övertygelse. Mest sannolikt är att de kommer att svara att sidorna i den största triangeln måste vara lika långa. Ibland kan det hända att någon grupp vill ha en likbent, rätvinklig triangel som den största. Sådant läge är guld värt. Här finns tillfälle till intuitiva resonemang.

Vi startar med den rätvinkliga, likbenta triangeln och håller två hörn fixerade av vilka det ena ligger vid den räta vinkeln medan det tredje hörnet får ändra sitt läge.



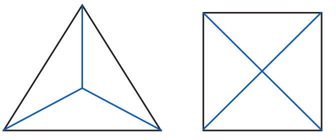
Hörnet följer en elliptisk bana och när det närmar sig linjen på vilken den motstående sidan ligger blir arean ganska liten. Arean blir större ju längre hörnet avlägsnar sig från den nämnda linjen. Då brukar eleverna känna på sig att maximum inträffar när den rörliga punkten befinner sig lika långt från de båda fixerade hörnen. En triangel med en fixerad sida får alltså störst area när de båda andra sidorna är lika långa: en likbent triangel. Störst area blir det om ingen sida är fixerad dvs när en triangel kan betraktas som likbent i förhållande till samtliga sina sidor: triangeln är liksidig.

Regelbundna polygoner

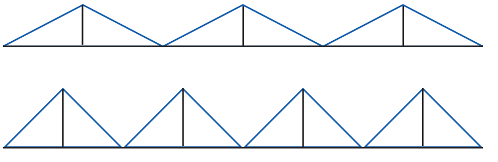
Triangelövningen kan användas till andra polygoner. Låt eleverna med hjälp av samma snöre försöka skapa figurer som är större än den liksidiga triangeln. Här kommer du antagligen att se en variation av figurer från kvadrat till cirkel. Att kvadraten har den största arean av samtliga fyrhörningar med samma omkrets går det att se på samma sätt som när det gällde trianglar. I en fyrhörning med tre hörn fixerade får man störst area när det fjärde hörnet befinner sig lika långt från sina grannhörn. Betraktar vi romber ser vi lätt att kvadraten blir den största av dem.

Nu finns det vissa likheter mellan liksidig triangel och kvadrat, eftersom båda tillhör kategorin regelbundna figurer. Och om kvadraten har större area än den liksidiga triangeln med samma omkrets bör arean öka med tilltagande antal hörn. Ökar vi antalet hörn i serien av regelbundna figurer närmar vi oss alltmer en cirkel.

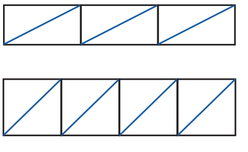
För äldre elever finns det tillfälle till djupare resonemang om varför ett ökande antal hörn ger större area. Låt oss betrakta en liksidig triangel och en kvadrat med samma omkrets. I båda figurerna markeras tyngdpunkten som förbinds med figurens hörn.



Sedan klipps båda figurerna från sina hörn mot tyngdpunkterna och vecklas ut så att vi får tre respektive fyra kongruenta trianglar liggande på en linje. Båda triangelkomplexen har samma bas men olika höjder.



Om man klipper de enskilda trianglarna längs deras höjder går det att omforma båda komplexen till rektanglar med samma bas men med olika höjder. Då ser man att ju längre avstånd mellan tyngdpunkten och en sidas mittpunkt desto större är arean.



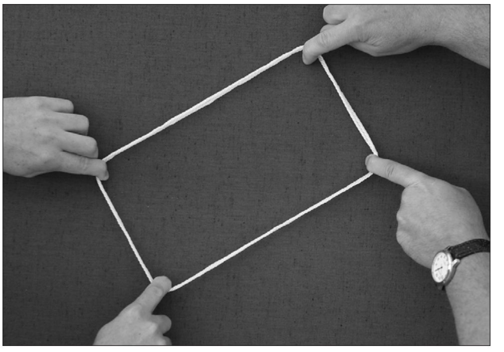
Fantasieggande rektanglar

Skolböcker är överfulla av uppgifter där eleverna ska beräkna area. Ändå visar sig förståelsen av areabegreppet vara svag. Böckernas exempel kan med fördel bytas ut mot elevernas egna. Låt varje elev tänka på en rektangel. Be eleverna att med utgångspunkt i denna rektangel skapa en som har dubbelt så stor area. Låt dina elever avslöja vilka rektanglar de har resonerat kring. Här får du uppleva två olika taktiker att komma fram till de dubbla rektanglarna. En del elever kommer antagligen att fördubbla den beräknade arean av sin ursprungliga rektangel och därefter dela upp den i två faktorer. De som är ”latare” tänker istället två ursprungliga rektanglar ställda bredvid varandra antingen längs bredden eller längs deras längd. Sådana strategier är viktiga att uppmuntra och kan åskådliggöras med två A4-ark placerade på de båda sätten bredvid varandra. Utifrån det kan nästa fråga bli: vad händer med omkretsen när arean fördubblas? När man utgår från de ”latas” lösningar kan man fråga vilken av dessa som har längre omkrets och ser att det går att avgöra utan att beräkningar behöver göras.

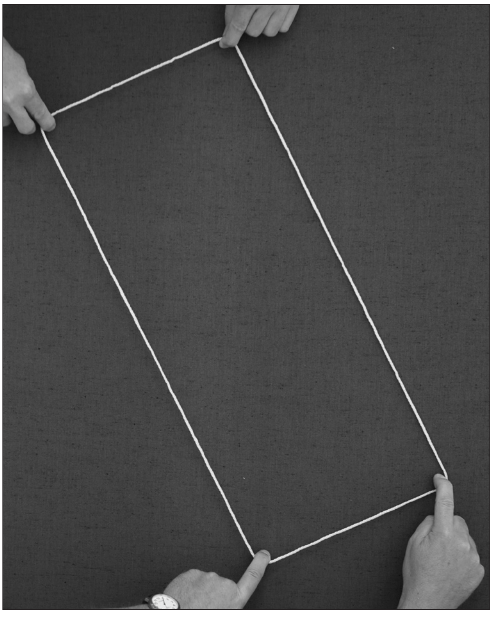
Låt dina elever utgå från den första rektangeln de tog fram och försöka skapa en med dubbelt så stor omkrets. Återigen får du se strategier som bygger antingen på beräkning eller på fördubbling av sidorna. Vad händer med arean av en rektangel när sidorna är fördubblade? Hur skapar vi fler rektanglar med samma omkrets? Vad händer med deras areor?

Båda kraven samtidigt

Nu börjar det bli dags för en något större utmaning. Kan man till varje rektangel skapa en rektangel där både area och omkrets är dubbelt så stora som i den ursprungliga? Att avgöra den frågan visar sig vara ganska svårt. Oftast får man inget svar och om man frågar vad eleverna tror får man olika svar med övervikt mot det negativa. Det händer ibland att någon hittar något exempel då det går. Om så inte sker kan man föreslå att man startar med rektangeln 3×4. Här gäller det att hitta en rektangel med halva omkretsen på 14 le och arean på 24 ae, två tal vars summa är 14 och produkt är 24. Det är lätt att inse att 2×12 passar. Betyder det då att det alltid är möjligt om ett exempel har hittats? Knappast. Även om vi hade hittat många exempel ger inte detta någon säkerhet. Problemet måste angripas på ett annorlunda sätt. Vi tar återigen hjälp av vårt snöre. Detta viks dubbelt och formas till en godtycklig rektangel.



När vi viker ut snöret igen får vi en figur med dubbelt så stor omkrets oberoende av figurens form. Vi formar en rektangel som är likformig med den som var tillverkad av det dubbelvikta snöret. Arean av den stora rektangeln är fyrdubbel.



Nu kommer hela finessen. Man ändrar rektangelns form till att bli mer avlång med bibehållandet av dess omkrets. På det sättet kan vi få en rektangel med en area som ligger godtyckligt nära noll. Vi kan konstatera att den ovan beskrivna proceduren ger kontinuerliga värden och vi måste ha passerat samtliga värden mellan fyra och noll, det vill säga att vi någon gång på vägen måste ha haft den dubbla arean.

Sidornas längder

Av exemplet ovan ser vi att reflexmässig beräkning många gånger gör oss blinda för enkla och på samma gång generella lösningar. Samtidigt kan man förvänta sig att intresset stiger för att kunna hitta speciella lösningar till varje fall. Vi vet ju att detta alltid är möjligt. Vi måste helt enkelt veta när det är dags att avbryta sammandragningen av snöret. Problemet kan med fördel lösas algebraiskt där den lilla rektangelns sidor kallas a och b. Till att börja med skissar vi en rektangel med dubbelt så stor omkrets där sidorna är $2a$ och $2b$. Denna är ju fyra gånger så stor som den ursprungliga. Den rektangeln bör avsmalnas till den dubbla arean dvs vi plockar bort lika mycket från bredden som vi lägger på längden. De nya sidorna blir $(2a + x)$ och $(2b - x)$ vilket ger ekvationen $(2a + x)(2b - x) = 2ab$.

Denna ekvation är inte den allra trevligaste att lösa. Vill vi komma lindrigare undan kan vi istället för den likformiga rektangeln starta med den största rektangeln, nämligen kvadraten. Kvadratens sidor är då $(a + b)$ och ekvationen får formen $((a + b) + x)((a + b) - x) = 2ab$.

Denna kan lösas med hjälp av konjugatregeln: $(a + b)^2 - x^2 = 2ab$ och får lösningen $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ som är diagonalen i den lilla rektangeln efter att vi har förkastat den negativa roten. Med andra ord får vi lägga ihop sidorna i den ursprungliga rektangeln när vi vill skapa den dubbla. Därefter får vi längden genom att lägga till diagonalen och bredden genom att plocka bort diagonalen.

Problemets omvändning

Kan man alltid gå från en godtycklig rektangel till en som är hälften så stor med avseende på både omkrets och area? Förväntar man sig spontana svar blir det nog oftast ja. Dock får vi inte glömma att ett påstående måste kunna prövas. Detta kan ske genom någon form av bevis. Hittar man inte ett sådant kan man inte ha fullständig säkerhet och bör vara förberedd på överraskningar. Nu ska man beakta att om vi hittar ett enda fall då det är omöjligt måste vi svara nej på frågan ovan. Låt oss starta med en kvadrat gjord med hjälp av snöret. Vik snöret dubbelt och bilda en mindre kvadrat. Denna har hälften så lång omkrets och är på grund av likformighet en fjärdedel av den ursprungliga arean. Nu gäller det för oss att genom omformning av det dubbelvikta snöret få en figur med samma omkrets men dubbelt så stor area som den lilla kvadratens. Enligt vårt tidigare resonemang är kvadraten den största fyrhörningen med given omkrets, vilket gör det omöjligt.

Å andra sidan finns det ju rektanglar som kan förminskas enligt önskemålet om vi betänker rektangeln 2×12. Denna förminskas till 3×4. Där ser man att "avlånga" rektanglar kan avbildas enligt önskemålet, men det går inte med de mer "kvadratiska". Då gäller det att hitta en gräns mellan de avbildbara och icke-avbildbara. Gränsen måste gå där bilden är en kvadrat. Försöker man hitta en dubbelt så stor rektangel med avseende på både omkrets och area till en kvadrat med sidan 1 visar det sig att dess sidor är $1 + 1 + \sqrt{2}$ och $1 + 1 - \sqrt{2}$. Detta ger att rektanglar där förhållandet mellan längd och bredd är större än eller lika med $(2 + \sqrt{2}) : (2 - \sqrt{2})$ har de önskade avbildningarna.

Matematikens mångfald

I dessa exempel ser man att matematik är som ett smörgåsbord. Den innehåller problem med många olika bottnar som både passar för nybörjaren och för den mer erfarne. Dessa problem kan angripas på många olika sätt och ge upphov till nya frågor och ny kunskap. Räknandet bör inte ses som ett huvudmål utan snarare som ett redskap då tankeprodukten börjar ta form. Om vi som lärare fokuserar för mycket på att få rätt svar på varje uppgift förblindas våra elever och de ser inte generaliseringarna.