Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Vad är egentligen ett matematiskt begrepp?

Begrepp är matematikens byggstenar. Ordet *begrepp* är rikt förekommande i kursplaner och ämnesplaner, men det är svårt att säga vad ett begrepp är. Här ger författarna förslag på en i undervisningssammanhang användbar och teoretiskt förankrad tolkning av begreppet begrepp.

Ingen vet exakt vad ett begrepp är. Om du tror att du vet kommer det garanterat finnas de som är oense med dig. Varje teori om mänskligt tänkande får explicit eller implicit sin egen teori om begrepp och har du bestämt dig för vad ett begrepp är har du implicit eller explicit en idé om hur du tänker om tänkande. Begrepp är fundamentala byggstenar i tänkande, men alla är alltså inte överens om vad begreppet begrepp betyder. Det här blir ju särskilt besvärligt i matematik eftersom det är den mest begreppstäta syssla man kan ägna sig åt. Det är alltså ett synnerligen intrikat projekt att ge sig på att förklara vad ett matematiskt begrepp är. Vi antar utmaningen.

Termer, begrepp och definitioner

Begrepp är matematikens byggstenar. En vanlig missuppfattning är att man blandar samman begrepp och termer. Ordet som betecknar något ska inte förväxlas med det som betecknas. Det är det senare som är begreppet. Att eleverna kan koppla ihop rätt term med rätt matematisk operation betyder inte att de ”kan begreppet”. Men det är en bra början. För att belysa skillnaden mellan att ha en uppfattning om en term och innehållet i ett begrepp använder vi konstanten pi. Om du frågar en skolelev vad pi är får du vanligtvis svaret 3,14. Det är tydligt att eleven har en association till termen pi. I själva verket beskriver det matematiska begreppet pi det linjära förhållandet mellan omkretsen och diametern på alla de matematiska objekt som vi har valt att kalla cirklar. Detta är det matematiska i det geometriska begreppet pi. Så vi skulle naturligtvis önska att elever svarade att pi är förhållandet mellan omkretsen och diametern för alla cirklar. Vet man inte det så vet man ju faktiskt inte särskilt mycket om pi.

Eftersom förmågan att använda begrepp är så viktig i matematik är det viktigt för lärare att fundera på vad begreppskunskap betyder. Och förmågan att använda matematiska begrepp ska också bedömas. Hur bedömer man egentligen något som ingen riktigt vet vad det är? Rent matematiskt har i allmänhet alla begrepp en strikt definition, annars är de inte matematiska. Fast det är inte helt sant. Matematiska *objekt* måste ha definitioner, men det finns matematiska företeelser som är viktiga utan att definieras. Matematiker bemödar sig t ex inte om att definiera begreppet ekvation i allmänhet, fastän det är ett av matematikens viktigaste begrepp. Det finns en massa gråzoner för vad som kallas en ekvation, men det gör inget. När vi måste veta exakt vad vi menar med en ekvation rör det sig alltid om någon specifik typ av ekvation och då kan vi ge en exakt definition för just den typen. Som att ett transcendent tal är ett tal som inte är lösningen till någon polynomekvation med heltalskoefficienter. För att den definitionen ska ha mening måste vi veta vad en polynomekvation är och att definiera en polynomekvation är lätt, $p(x) = 0$ för något polynom. Och så får vi bara definiera polynom, förstås. Så blir det nästan alltid. Begrepp hänger ihop med andra begrepp. Vi återkommer till den saken.

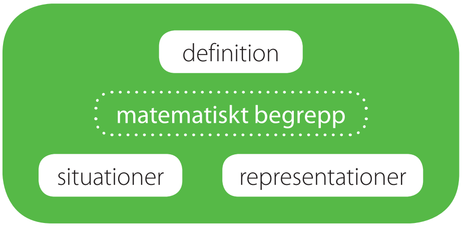
När studenter börjar läsa matematik på universitetet så präntas det ofta in att definitionerna är det viktigaste. Men det är bara delvis sant och faktiskt en ogenomtänkt utsaga. Vissa matematiska objekt har vi mycket goda uppfattningar om utan att särskilt ofta (om ens någonsin) tänka på den strikta matematiska definitionen. Tänk på addition. De flesta kan inte ge någon strikt definition men upplever sig ändå ha korrekta, stabila och funktionella uppfattningar om addition. Begreppet tal fungerar ungefär likadant. Vi vet att vi vet vad det är, men ändå är det inte helt enkelt att snyta fram en korrekt, entydig matematisk definition, trots att vi är lärare i matematik och därför förväntas kunna det. Så det räcker alltså inte att förstå matematiska begrepp enbart med matematiska definitioner. Begrepp är mycket mer komplicerat än så.

En definition av begrepp

Vi tänker att begrepp består av tre delar:

1. en matematisk definition
2. ett antal situationer som ger mening åt begreppet
3. ett antal representationer för begreppet.

Begreppet är en mental konstruktion som tar sitt stöd i dessa tre konkreta ben.



Vi väljer den här uppdelningen för att den visar sig vara operationaliserbar i undervisning på ett tämligen konkret sätt och ger oss därför en möjlighet att resonera om vad progression i matematikkunnande kan betyda när det gäller begreppskunskap.

För att illustrera våra tankar fortsätter vi på cirkeltemat. Innan det matematiska begreppet cirkel introduceras i matematikundervisningen så har förmodligen alla stött på och uppmärksammat många runda saker i sin omgivning, som t ex hjul, stubbar, rondeller, kastruller och tallrikar. Och bollar, även om de inte är riktigt runda på samma sätt. De är liksom ännu rundare åt alla håll. Sådana här praktiska föremål är inte cirklar men vi kan uppfatta den cirkulära egenskapen, rundheten, innan vi har kunskap om cirklar. Alla sådana här praktiskt uppfattningsbara fenomen som hör till det som senare ska komma att bli begreppet cirkel klassificerar vi under kategorin situationer. Situationen är det sammanhang där begreppet får mening. För att beskriva situationer behöver vi representationer.

Ett begrepps representationer är alla symboliska uttryck för begreppet, som orden cirkel, rund eller skrivna symboler. Just cirkel har ingen vedertagen symbolisk beteckning på det sätt som att addition betecknas med +. Men uttrycket *mängden av punkter i planet som ligger på samma avstånd, cirkelns radie, till en given punkt, cirkelns mittpunkt* är i sig en representation av cirkeln. Eller $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r\}$ eller $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. De två senare representationerna innefattar andra matematiska begrepp som de reella och komplexa talen och olika matematiska representationer av begreppet avstånd. Sådana symboliska representationer kan vi också operera matematiskt på i högre grad än vi kan på den rent verbala beskrivningen. Det är typiskt för matematiska representationer att de kan manipuleras matematiskt, både med och utan förståelse för vad man egentligen gör.

Gränsen mellan representationer och situationer är inte knivskarp. Om du ser klossar och tänker ”det är fyra” så tolkar du klossarna som en situation. Men om du lägger ut fyra klossar för att illustrera 4, så har du skapat en representation för talet 4.

Den matematiska definitionen är också en representation. Vi har valt att ge den en särställning i vår illustration av begrepp eftersom just definitioner trots allt är så viktiga i matematisk formalism. Men man ska inte heller glömma att vi ofta använder begrepp utan att hänvisa till eller ens kunna definitioner. Det beror på att man kan visa upp en god begreppskunskap även utan att kunna återge den matematiska definitionen, som i fallet addition. Själva definitionen är matematiskt intrikat och inte särskilt belysande. Antagligen har du aldrig sett den. I andra fall spelar den matematiska definitionen stor roll. Som vid introduktion av derivatabegreppet. Där visar elevens förmåga att manipulera representationer inte mycket om elevens kunskap om begreppet derivata. Detta har Johan Lithner vid Umeå universitet visat genom att lära mycket unga elever att derivera polynom. Hur lätt som helst. Bara att flytta ner talet som hänger i luften och byta ut det mot talet minus ett. Inte mycket begreppskunskap där.

Tillbaka till cirkeln och dess situationer och representationer. I skolmatematiken får eleverna arbeta med situationer där de beräknar arean av olika cirklar, räknar på runda hagar, beräknar omkretsen av ett hjul osv. Begreppet kommuniceras först till eleverna i uppgiftskonstruktionen, sedan i elevens arbete med att resonera om uppgiften, med sig själv, andra elever och med läraren. Alla dessa arbetsmoment kräver att eleven kan *koda av situationer och dess representationer* och att hon kan *representera* begreppet. Fundera på hur ett begrepp utan representationer och situationer skulle kunna förstås. Det är svårt att tänka sig ett sådant begrepp. Vi vill med exemplet slå fast att begreppet begrepp är en otillräcklig förklaringsmodell för begrepp. Därför menar vi att ett begrepp bör definieras som en treenighet av den matematiska definitionen, dess situationer som ger begreppet mening och de representationer som kan användas för att beskriva begreppet.

Den här beskrivningen av begrepp är inspirerad av den franska matematikdidaktikern och psykologen Gerald Vergnaud. Han har skrivit många skarpa, begreppstäta vetenskapliga artiklar om begrepp, begreppsfält, representationer och matematiska situationer. För den som inte räds att få träningsvärk i hjärnan rekommenderar vi en läsning av hans produktion. Vergnad menar att det inte ger någon mening för lärare att tänka på begrepp som isolerade öar som vart och ett kan definieras. Det beror på att inget begrepp kan existera utan andra begrepp. Inte ens de mest grundläggande begreppen (axiomen och postulaten) har mening utan existensen av andra begrepp. Det leder oss in på begreppet begreppsfält.

Begreppsfält

Münchhausens trilemma säger att vi aldrig kan förklara något fullt ut. Antingen hamnar vi i oändliga regressioner av förklaringar till förklaringar, eller så resonerar vi i cirklar eller så måste vi förlita oss på oförklarade axiom. För att exemplifiera kan vi betrakta likhetstecknet. I sin enkelhet bär det upp stora delar av matematikens orimliga effektivitet som modellverktyg för komplicerade fenomen i vår upplevda värld. (Innan du läser vidare kan du fundera på hur du själv definierar likhet.) Det är helt enkelt inte möjligt att förklara likhetstecknet utan begreppet uttryck. För vad är ett likhetstecken utan ett uttryck i höger led och vänster led? Blott en representation bestående av två meningslösa, horisontella, parallella streck. Om du tänker en stund så är det självklart att inget begrepp kan förklaras utan andra begrepp. Det här underminerar utsagan att ett matematiskt begrepp vilar på en matematisk definition. Det krävs ofta en hel radda begrepp med tillhörande definitioner för att definiera ett begrepp. Tänk på derivatans definition. Den kräver väldigt många väldefinierade begrepp för att eleverna ska ha en rimlig chans att nå kunskap om det. Vi lämnar åt dig som läsare att fundera på vilka begrepp som krävs som förkunskaper för begreppet derivata. Då funderar du på vilket begreppsfält du anser är nödvändigt att utveckla hos dina elever, för att de i sin tur ska utveckla kunskap om begreppet derivata. Begreppsfältet innehåller också alla andra begrepp som bygger på derivata, till exempel primitiv funktion. På samma sätt kan man fundera över begreppsfältet till pi, bråk eller heltal. Heltalens begreppsfält är kanske mer komplext än det för derivata, det är bara att vi tar det för givet.

Vergnauds idé om *begreppsfält (conceptual fields)* innebär ett antal sammanflätade situationer, begrepp och deras representationer. Det följer att kunskap om ett begrepp inte kan skapas ur enbart en situation, utan kräver en mängd olika situationer. Dessutom kan en situation inte analyseras med ett begrepp ensamt. Eleven måste alltid använda sin kunskap om flera begrepp för att analysera en situation. Alla de begrepp som används för att attackera en matematikuppgift eller ett problem, ingår i ett begreppsfält. Följaktligen, men samtidigt väldigt meta, så kräver även begreppet begreppsfält sitt begreppsfält för att förstås. Vi kommer nu att översiktligt presentera de för begreppsfälten centrala begreppen *operationell* och *predikativ kunskap*, och *teorier-i-handling* och *begrepp-i-handling*. Varning för begreppstät text!

Vi lärare har som uppgift att organisera undervisning som utvecklar elevernas begreppskunskap. Men vad är egentligen begreppskunskap? I teorin om begreppsfält består begreppskunskap av två komponenter, operationell och predikativ kunskap. Dessa två komponenter av kunskap kan inte delas upp och betraktas var för sig, eftersom de är sammanflätade förutsättningar för varandra. *Den operationella kunskapen* är förmågan att välja och genomföra effektiva operationer eller andra handlingar. *Den predikativa kunskapen* består av de lingvistiska och symboliska uttryck som används för att uttrycka den operationella kunskapen. Förenklat handlar operationell kunskap om att kunna utföra saker och predikativ kunskap om att kunna uttrycka saker. Men de två formerna går i varandra för du utför också saker med hjälp av de predikativa formerna. Elevernas begreppskunskapsutveckling kan beskrivas som att eleverna över tid får arbeta med fler och fler matematiska definitioner, situationer och representationer som förhoppningsvis leder till fler kopplingar mellan operationer och predikativa uttryck, dvs större och starkare begreppsfält.

Vi exemplifierar idén om begreppsfält med en proportion. För er som har läst våra tidigare artiklar så är det ingen överraskning att vi väljer detta synnerligen intrikata och intressanta begreppsfält.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Det begreppsfält som aktiveras för att utföra proportionella resonemang, dvs resonemang om en likhet mellan två förhållanden, är olika för olika individer. Det beror helt på vilka tidigare erfarenheter eleven har, vilka begrepp som mentalt finns tillgängliga och hur de tolkar representationerna i situationen. Den operationella kunskap som aktiveras kan variera mycket beroende på den matematiska kontext proportionen presenteras i, även om den matematiska idén är densamma. Helt klart är att det inte finns *ett* begrepp som vilar på *en* definition som understödjer alla de resonemang som kan föras om en proportion. Vi associerar vid ett snabbt ögonkast till begreppen likhet, kvot, rationella tal, multiplikation, invers, division, skalärt och funktionellt resonemang. De teorem som aktiveras beror på våra tidigare erfarenheter. Fyrtiotalisterna tänker kanske på regula de tri eller korsmultiplikation. Vissa ser alltid ekvationer överallt. Du som läser ser säkert andra saker utifrån dina egna erfarenheter. Poängen är att vi alla har olika begreppsfält där de ingående situationerna kommer att aktivera olika sorters lösningsstrategier. De teorier som mer eller mindre medvetet kommer att användas kallas *teorier-i-handling*. Den benämningen syftar till att poängtera att du kan ha en operationell kunskap för hur du ska hantera vissa situationer utan att kunna svara på frågan: Jaha, och vilken teori bygger du ditt resonemang på? Det samma gäller för *begrepp-i-handling*. Jämför med ett barn som hanterar olika additionssituationer helt korrekt. Hon kan inte förväntas ge matematiska definitioner för begreppen addition, likhet och tal, som alla behövs för att kunna lösa uppgifterna. Men genom invarianter i sitt handlande med begreppen, begrepp-i-handling, visar barnet operationell kunskap om addition. Det krävs också vissa teorier, teorier-i-handling, som kardinalitetsprincipen.

Syftet med teorin om begreppsfält är att hjälpa lärare att bringa reda i hur man ska förhålla sig till begrepp och begreppskunskap när man planerar och genomför sin undervisning. Vi menar att det är mer meningsfullt att tänka på de begreppsfält som eleverna behöver utveckla än att tänka på matematiska begrepp i singular. Begreppsfält ger också möjlighet till en mer holistisk syn på elevers begreppsutveckling samtidigt som det kan användas som ett analytiskt instrument för att samla information om elevers begreppskunskap.

Hur lärare kan arbeta med att dokumentera och bedöma elevers begreppsutveckling kommer författarna att skriva om i sin nästa artikel. Där kommer de också att mer detaljerat beskriva vad progression i begreppskunskap kan betyda.