

Färdigheter och förståelse

ARK-projektet avslutades 1983. Projektledare var *Lars-Eric Björk*, Sunnerboskolan Ljungby och *Hans Brolin*, institutionen lärarhögskolan Uppsala universitet. De redogör här för bakgrunden till projektet, genomförande och resultat, och kommer också in på datorn i matematiken.

Inledning

Samhället förändras snabbt. I början av seklet var Sverige fortfarande ett jordbruksland med halva befolkningen sysselsatt inom jord- och skogsbruk. Idag arbetar nästan 70 % inom informations- och servicesektorn. Denna drastiska samhällsförändring har också ändrat villkoren för matematikämnet i skolan. Informationssamhället ställer nya verktyg, främst miniräknaren och mikrodatorn, till skolmatematikens förfogande. Men det nya samhället ställer också nya krav: fler och fler ska kunna använda mer och mer matematik på ett realistiskt sätt i yrkes- och vardagsliv.

Hittills är det främst miniräknaren som påverkat skolmatematiken. Det finns flera skäl till att datorns inverkan på matematiken varit marginell: datorerna har varit svårtillgängliga i särskilda salar, användbara program med elevövningar har saknats, innehållet i skolkursen har inte krävt datorhjälp eller gett tid för problemlösning med datorer. I framtiden kan det bli annorlunda.

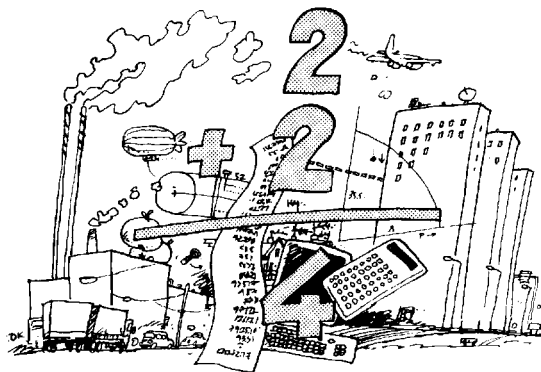
Skolmatematikens uppgift

Många tror fortfarande att skolmatematikens huvudsakliga uppgift är att lära eleverna att utföra numeriska beräkningar för hand. I själva verket är skolmatematikens viktigaste mål att lära eleverna förstå och lösa de matematiska problem som de möter i vardagsliv, arbete, andra skolämnen och i matematikämnet självt.

När man löser ett matematikproblem måste man ofta utföra ett antal numeriska beräkningar och de flesta problem avslutas med en numerisk beräkning. All matematikundervisning har därför av tradition alltid inletts med att ge eleverna grundläggande färdigheter i aritmetik. Före miniräknarens tid krävde detta mycket färdighetsträning. Hur blev utbytet?

Några räknefärdighetsundersökningar

År 1966 reformerades gymnasieskolan. Man fick helt nya linjer och kurserna i matematik präglades av den nya matematikens idéer. När eleverna från detta nya gymnasium anlände till de tekniska högskolorna diagnostiserade man deras matematikkunskaper. Man upptäckte då som en biprodukt att deras färdigheter i aritmetik var bristfäll-



liga. Detta medförde att man på många håll genomförde undersökningar av elevernas räkneförmåga på olika stadier.

I en stor räknefärdighetsundersökning vid lärarhögskolan i Uppsala i början av 1970-talet ingick bl a divisionen

$$\frac{84}{175}$$

Endast 43 % av eleverna i åk 9 kunde klara den med handräkning!

För 9 ak var lösningsfrekvensen 20 %!

Ett centralt problem i procenträkning av typen *I Yxhult röstade 84 av 175 röstande på socialdemokraterna. Hur många procent var detta?* var alltså egentligen meningslöst att ge i åk 9 före miniräknarnas tid. (Åtminstone om man inte behärskade räknestickan, vilket få gjorde.)

En senare undersökning (1977) inom ARK-projektet visade att på vårterminen i åk 6 kunde endast 51 % dividera med 15. En direkt slutsats av dessa undersökningar är följande:

Verklighetsanknutna problem där man t ex skulle bestämma procentsatsen hade alltså hälften av eleverna i grundskolan ingen möjlighet att klara.

Färdigheter och förståelse

Utomordentligt viktigt är att man skiljer på:

- *förmåga att förstå och kunna lösa problem* och
- *färdighet i algoritmräkning.*

Förståelsedelen är i allmänhet helt oberoende av färdighetsdelen.

Vi har valt att exemplifiera med följande problem:

1. En skytt skjuter två skott mot en tavla. Sannolikheten för träff i skott 1 är 0,75 och i skott 2 0,85. Bestäm sannolikheten för två träffar.

$$\text{Sannolikheten för 2 träffar} = 0,75 \cdot 0,85$$

2. Priset på miniräknaren MP S3 sänks den 1 september med 25 % och den 1 november med ytterligare 15 %. Bestäm den totala prissänkningen i procent.

Om priset före den 1 september är a kr blir priset efter den 1 november

$$0,75 \cdot 0,85 \cdot a \text{ kr}$$

3. En oljetank har formen av ett rätblock med måtten $1,7 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}$. Bestäm tankens volym.

$$\text{Volymen} = 1,7 \cdot 0,5 \cdot 0,75 \text{ m}^3 = 0,6375 \cdot 0,75 \text{ m}^3$$

I samtliga dessa tre problem måste man kunna utföra multiplikationen $0,75 \cdot 0,85$. Denna färdighet har emellertid inget att göra med förståelsen och förmågan att se hur problemen ska lösas! Problemlistan ovan kan utvidgas hur långt som helst.

Miniräknarens införande

När miniräknaren från mitten av 1970-talet blev tillgänglig i svenska skolor insåg man att matematikundervisningen stod inför en revolution av oanade mått: Mekaniskt räknearbete kunde ersättas med problemlösning.

Miniräknaren infördes inte i skolan av skolöverstyrelsen eller någon annan myndighet. I själva verket var det eleverna på gymnasieskolans naturvetenskapliga och tekniska linjer som själva tog med sig miniräknare till matematiklektionerna. Lärarna blev tveksamma om hur man skulle förfara och frågade därför Skolöverstyrelsen om miniräknarna fick användas på lektionerna och på prov. Skolöverstyrelsen svarade att vid lektioner och på egna prov fick lärarna själva avgöra hur de skulle förfara. På Skolöverstyrelsens centrala prov var emellertid inte miniräknaren ett tillåtet hjälpmedel.

Utvecklingen gick emellertid mycket fort. Redan läsåret 1977/78 var miniräknaren tillåten som hjälpmedel vid de centrala proven. I gymnasieskolan var därmed miniräknaren införd som ett hjälpmedel. På högstadiet dröjde det lite längre innan miniräknaren blev ett naturligt hjälpmedel och på mellanstadiet används den ännu inte alls.

Våren 1976 tillsatte Skolöverstyrelsen en arbetsgrupp för *Analys av räknedosornas konsekvenser*, kallad ARK-gruppen. Den inledde sitt arbete med att formulera problemställningar. Ut-

gående från dessa initierades sedan utvecklingsarbeten. Frågorna var många:

Vilken handräkning skulle krävas av eleverna?

Påverkades elevernas taluppfattning av mindre algoritmräkning?

Ökade deras förmåga att lösa problem?

Kan nya begrepp införas på ett metodiskt annorlunda sätt?

Dessa frågor bearbetades bl a för mellanstadiets del i RIMM- och IAB-projekten.

RIMM- och IAB-projekten

De räknefärdighetsundersökningar som genomfördes i början av 1970-talet visade, som vi redan sett exempel på, att flertalet elever på högstadiet inte klarade relativt enkla beräkningar. Detta hindrade stora grupper av elever från att lära sig matematik och framför allt från att kunna lösa meningsfulla problem.

De grundläggande färdigheterna i algoritmräkning ges på mellanstadiet. En stor del av den givna tiden för matematikstudier ägnas där åt träning i algoritmräkning. När man nu trots detta når så blygsamma resultat var det angeläget att undersöka vad som händer om man på mellanstadiet reducerar algoritmräkningen och istället använder miniräknaren vid komplicerade beräkningar.

Detta undersöktes av ARK-projektet inom delprojektet RIMM (Räknedosan I Mellanstadiets Matematikundervisning) under ledning av Rolf Hedrén. I detta projekt reducerades nivån inom algoritmräkningen. Man nöjde sig t ex med division med ensiffrig nämnare. På så sätt skapade man utrymme för mer problemlösning, där man fick använda miniräknare. Ett försöksmaterial framställdes och utprovades i årskurserna 4–6 läsåren 78/79–80/81. Materialet reviderades efter detta och ett huvudförsök genomfördes 79/80–81/82.

Utomordentligt intressant var att se hur en reduktion av algoritmräkningen och en samtidig ökning av problemlösningen påverkar

- a) de icke-algoritmiska basfärdigheterna
 - taluppfattning (decimaltal, bråktal)
 - enhetsuppfattning
 - förmågan att välja rätt räkneoperation
 - förmågan att tolka tabeller och diagram
- b) förmågan till uppskattning och överslagsberäkning
- c) förmågan att räkna för hand (algoritmräkning)
- d) problemlösningsförmågan.

Parallellt med RIMM arbetade inom ARK-projektet ett annat delprojekt IAB (Icke-Algoritmiska Basfärdigheter) med att producera instrument med vars hjälp man skulle kunna mäta de

färdigheter och insikter ovan som man ville undersöka. Projektet leddes av Adolf af Ekenstam och Karl Greger. Redan våren 1977 kunde man i 80 slumpvis valda klasser i åk 6 genomföra test som mäter de icke-algoritmiska basfärdigheterna, förmågan till uppskattning och överslagsräkning samt förmågan att räkna för hand. Sverige är genom detta i den unika situationen att vi vet elevernas färdigheter och insikter inom dessa områden innan miniräknaren införts.

IAB-projektet producerade sedan test som mäter problemlösningsförmågan på mellanstadiet.

Testen genomfördes i slumpvis valda klasser i åk 6 på våren 1982.

Dessa mätinstrument gav ARK-projektet en möjlighet att få ett första resultat som visar vad som händer om man på mellanstadiet använder miniräknare och samtidigt reducerar algoritmräkningen. De klasser som deltog i RIMM-projektets huvudförsök fick nämligen genomföra testen i åk 6 våren 1982. Vi fick då en första jämförelse mellan klasser som använt och klasser som ej använt miniräknare.

Sammanfattande resultat

Genomsnittlig lösningsfrekvens	Elever i åk 6	som ej använt miniräknare (80 slumpvis valda klasser)	som var försöks- klasser i RIMM (8 klasser)
Icke-algoritmiska bas- färdigheter (49 uppg)		63,5 %	72,0 %
Uppskattning och över- slagsberäkning (10 uppg)		42,5 %	52,5 %
Algoritmräkning (10 uppg)		76,1 %	77,2 %
hela tal		85,8 %	88,4 %
decimaltal		66,4 %	66,0 %
Problemlösningsförmåga (25 uppg)		64,2 %	66,8 %
Huvudräkningstest (15 uppg)		56,7 %	61,2 %

Av resultaten framgår att försök med miniräknare på mellanstadiet bör ske snarast i stor skala. Detta skulle ge en unik möjlighet att stärka både nödvändiga färdigheter och förståelse. Viktigt är att precisera vilka baskunskaper som ska krävas i handräkning. Dessa ska sedan tränas ordentligt. På högstadiet ska sedan miniräknaren vara ett naturligt hjälpmedel med bibehållande av de baskunskaper som uppställts. Dessa bör tränas åtminstone en gång per månad.

Som resultat av RIMM- och IAB-projekten har publicerats två fortbildningsmaterial för mellanstadielärare, se referenser.

Miniräknarens vinster

Miniräknaren har haft en enorm betydelse för skolmatematiken i vårt land. Den har befriat oss från tidsödande rutinräkningar och skapat tid för förståelse och problemlösning. Huvudräkning, enkel handräkning och överslagsräkning har stärkts. På mellanstadiet har miniräknaren ibland setts som ett hot, främst beroende på att många mellanstadielärare uppfattar algoritmräkningen som det viktigaste målet med mellanstadiets ma-

tematikkurs. En försiktig övergång till en kurs med mindre drill och med mera förståelse borde kunna ta bort den obefogade rädslan för miniräknaren och den underliggande känslan av att det skulle vara "fel" att ta miniräknaren till hjälp.

Datoralgebra

För 10 år sedan gav datatekniken oss miniräknaren. Den har vitaliserat skolmatematiken både innehållsmässigt och metodiskt. Idag erbjuder datatekniken skolmatematiken ännu kraftfullare verktyg: matematikverkstäder och symbolhanterande program — ännu så länge bara på mikrodatorer, men snart också i räknarformat.

I matematikverkstäderna integreras program för bl a kurvritning, ekvationslösning, bestämning av maxima och minima samt beräkning av integraler. De symbolhanterande programmen kan utföra förenklingar, deriveringar och integrationer i algebraisk form!

Frågorna som ARK-projektet ställde när miniräknaren skulle införas återkommer fast på en annan nivå:

Var ska vi sätta gränsen för elevernas förmåga att manipulera uttryck för hand?

Påverkas elevernas förståelse av mindre färdighetsträning i algebra?

Ökar deras förmåga att lösa problem?

Kan metodiken ändras?

På samma sätt som aritmetiska färdigheter inte automatiskt medför att man kan lösa problem, så medför algebraiska, manipulativa färdigheter inte nödvändigtvis att förståelsen ökar. Den som kan utveckla $(2x + 3y)^2$ enligt kvadreringsreglerna kanske inte förstår vad $2x + 3y$ står för. Den som kan derivata $y = (4x + 5)^2$ kanske inte förstår vad $y = 8x + 10$ står för osv.

Det finns skäl att närma sig matematikverkstäden och de symbolhanterande programmens användning inom skolkurserna med en förutsättningslös och kritiskt granskande inställning. Det gäller för övrigt all ny teknik. Dagens primitiva symbolhanterare ger dessutom bara en antydning om vad vi kan vänta oss. Jämför med de första klumpiga och dyra miniräknarna!

Miniräknaren har idag fått oss att överge större delen av det gamla algoritmräknandet på högsta-diet och i gymnasieskolan. Kommer datoralgebra att i morgon tränga undan en stor del av det algebraiska manipulerandet?

ADM-projektet

Inom ADM-projektet (Analys av Datorns konsekvenser för Matematikundervisningen) vid institutionen för lärarutbildning i Uppsala har en försöksverksamhet med större program i matematiken på gymnasieskolan inletts. ADM-projektet har följande målsättning:

Analys av datorns konsekvenser för matematikämnets innehåll:

- datorn som "verktyg" (utnyttjande av färdiga program såsom kalkylprogram, statistikprogram, "matematikverkstäder", symbolhanterande program),
- målbeskrivning, materialutveckling, prövning och analys av konsekvenser.

Analys av datorns didaktiska konsekvenser:

- begreppsförståelse och användning,
- problemlösning m m.

Analys av datorn som undervisningshjälp (datorstöd).

Projektets verksamhet enligt ovanstående målbeskrivning baseras bl a på befintliga program och programpaket: matematikverkstäder, kalkylprogram, statistikpaket, symbolhanterande program.

Arbetet startar med förberedande pilotförsök med elevmaterial i några få klasser våren 1987. Avsikten är att försöket ska utvidgas kommande läsår.

Matematik och teknik

Den nya tekniken har bl a följande konsekvenser för matematiken:

- Nuvarande kurser kan inhämtas bättre.
- Nya moment kan tillföras.
- Vad som är viktigt måste omprövas.
- Undervisningens inriktning förskjuts från färdighetsträning mot förståelseinriktad problemlösning.

Många som tvekar att ta den nya tekniken till hjälp i matematik glömmer att verktygsanvändning är ett av människans främsta kännetecken. Vi har alltid använt verktyg, även i matematik: stenar, räknepjälar, kulor, kugghjulräknare, räknestavar, räknestickor . . . Den stora skillnaden är att de nya verktygen är så kraftfulla att stora förändringar inträffar på mycket kort tid. Detta fokuserar de stora hindren till alla förändringar inom skolundervisningen: avsaknad av moderna läromedel, eftersläpande lärarfortbildning och en bristfällig kontakt mellan olika stadi-er.

Vår tvekan att använda teknik är ofta en tvekan inför det okända. Men i detta fall borde valet vara lätt: vad det handlar om är ju helt enkelt att vi byter den mekaniska, rutinmässiga färdighetsträningen mot insikt och förståelse. Det borde väl göra vår mänskliga roll lite klarare gentemot teknik och verktyg.

Referenser

Björk, L-E och Brodin H, *ARK-projektet: En sammanfattande rapport för verksamheten 1976—1983*. Liber Utbildningsförlaget, Stockholm 1984.

Carss, M (ed), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser, Boston 1986.

Pavelle R, Rothstein, M and Fitch, J, *Computer Algebra*, Scientific American 245 (1981): 136—152.

Ralston, A and Young, G S (eds), *The Future of College Mathematics*, Springer New York 1983.

Nämaren, *Tema: Miniräknaren*, nr 3 83/84. Liber Utbildningsförlaget, Stockholm 1984.

Som resultat av RIMM- och IAB-projekten har publicerats två fortbildningsmaterial för mellanstadielärare:

Miniräknaren i mellanstadiets matematikundervisning. Högskolan i Falun 1984.

Matematikämnet i förändring — eftertanke och påverkan. Liber Utbildningsförlaget 1984.