

Skriftlig huvudräkning igen

I en artikel i ett tidigare nummer av Nämnaren ställs frågan om

Skriftlig huvudräkning är/kan bli en vågrät algoritm.

Här svarar Birgitta Rockström, som utvecklat metoden tillsammans med sina elever, utifrån sina erfarenheter och idéer. Elevernas egna tankar och resonemang kring tal är en viktig del av undervisningen i Skriftlig huvudräkning.

I Nämnaren nr 3 ställde Erika Nygren och Helena Persson frågan om skriftlig huvudräkning är en vågrät algoritm. Efter som jag under flera år, sedan början av 1980-talet, både utarbetat och utprövat metoden tillsammans med mina elever på mellanstadiet, så vill jag besvara frågan med att den är allt annat än en ny algoritm.

Jag lärde mig mycket av mina elever, som såg på matematiken med friska och okonventionella ögon – inte så formalistiskt och traditionellt som vi vuxna ser det med redan färdiga lösningar som vi försöker överföra. Att metoden skriftlig huvudräkning blivit så enkel och användbar är till största delen mina elevers förtjänst. Det är de som kommit med idéer och förslag, min uppgift har varit att se till att deras tankar höll sig inom de matematiska ramarna. Många gånger både förvånades och förundrades jag över hur mycket mina elever kunde när det gällde matematiskt tänkande.

Logiskt tänkande femåringar

Konstnären och konstprofessorn Oscar Reutersvärd, mannen bakom "omöjliga figurer", de i luften fritt svävande figurerna som han tecknade i isometriskt perspektiv, där till exempel fyra skorstenar som står på marken plötsligt blir tre uppe i himlen, reste i många

år runt och höll gästföreläsningar om sina bilder. Han föreläste för femåringar.

"Barn upp till fem år är som narkotikahundar" sa han. "Med sin snabbhet, sitt logiska tänkande och analytiska förmåga genomsöker de mina bilder och hittar blixtnsnabbt orsaken till det bedrägliga i dem. I bilderna skiljer barnen snabbt på vad som är sant och vad som är falskt. Jag grundar mina påståenden på 20 års erfarenhet, så länge har jag nämligen rest runt och prövat mina teorier på femåringar", sa Oscar Reutersvärd.

Vad gör vi i skolan med dessa femåringar? De har just den förmågan som är så viktig i matematik – logiskt tänkande och analytisk förmåga och är dessutom nyfikna och kreativa. I första klass kan eleverna använda likhetstecknet och skriva både $4+3=7$ och $7=4+3$. Men vad händer när talen blir tvåsiffriga, tex $16+16$? Jo, då ska de skriva talen under varandra och lära sig vilka "siffror" man börjar med, var man sätter minnes-siffror och senare decimaltecknet – ibland rakt under och ibland inte rakt under beroende på räknesätt. Likhetstecken finns inte. För barn som fortfarande ser talen, inte sexor och ettor som ska placeras på rätt ställe, kan det vara naturligt att tänka först tiotalen $10+10=20$, sedan entalen $6+6=12$ och sist tiotalen plus entalen $20+12=32$, vilket de så småningom kan skriva med ett mellanled: $16+16=20+12=32$.

Standardalgoritmernas för- och nackdelar

Våra algoritmers poäng ligger i att alla tal räknas som ental. Om man kan räknesätts-tabellerna med ental och kan lära sig och komma ihåg reglerna – som varierar beroende på räknesätt – så kan man räkna ut det mesta med hjälp av en algoritm. Men vad händer med elevens taluppfattning när alla tal räknas som ental? Var finns förståelsen för hundratal och hundradelar? Var finns det viktiga likhetstecknet? Var finns elevens egen förmåga att uppfatta talens storlek och inbördes förhållande tex i 401 – 397? Hur ska de kunna avrunda ett tal, tex $3 \cdot 875$, när de bara kan $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$ och $3 \cdot 8$, inte $3 \cdot 900$? Hur klarar man en tidsberäkning med standardalgoritmen?

Att elever som gjort alla uträkningar med algoritm får svårt med huvudräkning kunde man läsa om i rapporteringen från Højma-projektet med elever i åk 5 (Unenge, 1985). Uppgiften 401 – 397 blev 196, när de i huvudet ställde talen under varandra och började med $1 - 7 = 6$ osv. Det var bara ca 15% av eleverna som "såg" att talen låg så nära varandra att de kunde tänka med utfyllnad från 397 till 401.

Den goda taluppfattning som barnen har går förlorad med standardalgoritmernas intåg. I stort sett gäller det att lära sig utan till hur man gör med siffrorna. Det viktiga likhetstecknet är borta, vilket gör att elever senare får svårt med både algebra och ekvationer. Att matten av många elever kan upplevas som tråkig och fantasilös är inte så konstigt.

Teckna – titta – tänk

I många år lärde jag ut standardalgoritmerna innan jag förstod att dessa hämmade och stoppade mina elevers utveckling i matematik. För att komma ifrån den mekaniska algoritmräkningen var den första uppmaningen till mina elever att teckna alla uppgifter, dvs skriva vågrätt och använda likhetstecknet. Sedan skulle de titta på talen och tecknet och jämföra talens inbördes

förhållande. De skulle tänka ut en enkel lösning. För att jag skulle se att de förstod likhetstecknets innebörd var de tvungna att skriva ner sina tankar i ett mellanled. Mellanledet kunde se ut på olika sätt, vilket ledde till många förklaringar, frågor och diskussioner. Den tysta matematiken var ett minne blott.

Mellanledet kan se olika ut

Det som kännetecknar skriftlig huvudräkning är att ett mellanled skrivs ner. Man håller några uträkningar i huvudet och skriver ner det man behöver för att vara säker i tankarna. När man ser sina tankar kan man kontrollera och reflektera över sitt tänkande. Skrivandet blir på så sätt ett verktyg för att utveckla tänkandet.

Mellanledet följer inte "ett på förhand bestämt mönster", varje uppgift får sin egen lösning beroende på uppgiftens utseende och elevens kreativitet. Olika lösningar till samma uppgift inbjuder till resonemang och argumentation, där eleverna både ger och tar till sig nya tankar. Det blev en utmaning för mina elever att hitta den enklaste lösningen, till exempel i subtraktion: $7002 - 3008 = 4000 - 6 = 3994$. Jämför den lösningen med motsvarande algoritm, som är så svår för många elever.

Förkunskaper

Exemplet som Nygren/Persson tar upp som ett "på förhand bestämt mönster" från Matteboken 3B är inte en ny vågrät algoritm utan det första steget i skriftlig huvudräkning. Det krävs vissa förkunskaper som inte är alldeles självklara för alla elever och därför behöver tränas. Man måste kunna skriva ett tal i utvecklad form: $64 = 60 + 4$. Man måste kunna generalisera de enkla tabellerna – om $6 + 3 = 9$ så är $60 + 30 = 90$. Och man måste förstå hur man kan använda likhetstecknet för att förenkla uppgiften: $64 + 33 = 90 + 7 = 97$. Varje nytt steg i skriftlig huvudräkning kräver nya förkunskaper, som man inte bör försumma.

Varje talsort för sig

Grundprincipen i alla räkneshättor är att räkna varje talsort för sig och att börja med den största talsorten. Då är man också nära överslagsräkning. Men en god taluppfattning gör att eleverna ibland kan hitta andra enklare lösningar, till exempel $64 + 98 = 62 + 100 = 162$. Några elever räknar kanske varje talsort för sig: $64 + 98 = 150 + 12 = 162$, men inser snart att den första lösningen var enklare. Ju enklare, desto fler felkällor kan man undvika.

Addition är för eleverna det enklaste räkneshättet och därför bra att börja med tills eleverna har utvecklat sin taluppfattning, sina tabellkunskaper och fått förståelse för likhetstecknet. Subtraktion innebär inte några svårigheter för mina elever, tvärtom – det blev mera spännande att hitta olika lösningar. Grundprincipen var fortfarande "varje talsort för sig", till exempel $94 - 51 = 40 + 3 = 43$ och $94 - 57 = 40 - 3 = 37$. Den senare lösningen som var självklar för eleverna, kan vara svårare för lärare och andra vuxna att förstå.

Vad har hänt med Skriftlig huvudräkning?

När talen var flersiffriga hittade mina elever andra sätt att förenkla: $531 - 398 = 533 - 400 = 133$, varje term ökas med 2. När skillnaden mellan talen är liten, kan man tänka med utfyllnad, som på tallinjen, från 495 till 503: $503 - 495 = 5 + 3 = 8$. Denna lösning är lämplig när talen är nära varandra.

Tyvärr har metoden skriftlig huvudräkning förvanskats i vissa läromedel, och även i arbetsplaner för skolor, där man uppmanar eleverna att "räkna bakifrån med plus" när de ska subtrahera. Detta är verk-

ligen att göra det svårt och krångligt för både elever och lärare. Jag vill ta ett exempel. Om man räknar ut $168 - 43$ med metoden "bakifrån med plus" ser mellanleden ut så här: $168 - 43 = 7 + 50 + 68 = 110 + 15 = 125$. Förutom att det är svårt att förstå vad "bakifrån med plus" innebär, så har man krånglat till det i onödan. När jag frågade mina elever hur de skulle göra, fick jag svaret "det ser man ju att det blir 125". Visst, om man i det här fallet subtraherar varje talsort för sig så behöver man inte ens skriva ett mellanled.

Poängen med Skriftlig huvudräkning är att man kan och ska välja tankemodell efter vilka tal som ingår i beräkningen. Det är därför jag inte vill betrakta det som en ny algoritm.

Elevernas egna tankar

Skriftlig huvudräkning ger också möjlighet att ha flera termer än två när man tecknar en subtraktion, till skillnad från algoritmen som bara kan ha två termer. En flicka i åk 3 gjorde först en egen textuppgift, tecknade uppgiften och räknade sedan ut så här: $748 - 129 - 129 = 500 - 10 = 490$. Några tankar hade hon i huvudet, några skrev hon ner för att känna sig säker. (Exemplet är hämtat ur *Metodbok – Elevernas textuppgifter*, som utkommer 2007.)

När en elev på lågstadiet skulle lösa divisionen $298 / 2$ hade hon varken hört talas om liggande stolen eller kort division, så hon tänkte "varje talsort för sig": $298 / 2 = 100 + 45 + 4 = 149$.

Mina elever fick i uppgift att hitta olika lösningar till $4,5 \cdot 12$. Deras förkunskap var att de kunde tolvans tabell och visste att 4,5 är detsamma som "fyra och en halv". Efter en stunds funderingar kom följande förslag med muntliga förklaringar:

Nu är det roligt med matte för man får tänka, förut räknade man bara siffror, sa Carola när hon arbetade med skriftlig huvudräkning i stället för uppställning (algoritm).

$$4,5 \cdot 12 = 9 \cdot 6 = 54$$

jag delade upp 12 i 2×6 och tänkte först $4,5 \times 2$

$$4,5 \cdot 12 = 48 + 6 = 54$$

jag tog först 4×12 , sen la jag till hälften av 12

$$4,5 \cdot 12 = 45 + 9 = 54$$

jag tänkte $10 \times 4,5$ plus $2 \times 4,5$

$$4,5 \cdot 12 = 60 - 6 = 54$$

jag räknade först 5×12 , sedan tog jag bort hälften av 12

Utan att de hade hört talas om de associativa och distributiva lagarna utnyttjade de dessa intuitivt. Den första lösningen, att dela upp 12 i faktorerna 2 och 6, ledde så småningom till tankegången "dubbelt-hälften" eller "hälften-dubbelt" beroende på talens ordning. Den tankegången använde en elev när hon löste följande multiplikation: $4,44 \cdot 1,75 = 2,22 \cdot 3,5 = 1,11 \cdot 7 = 7,77$ medan en annan elev löste samma uppgift så här: $4,44 \cdot 1,75 = 7 + 0,7 + 0,07 = 7,77$

När eleverna har insett att matematik är något helt annat än att följa givna mönster eller regler är det nästan ingenting som tycks omöjligt. Det fanns de som hellre än att använda miniräknare löste uppgifter som $456 \cdot 789$ med skriftlig huvudräkning. Lite längre tid tog det, men hur mycket vann de inte i matematisk förståelse och tillfredsställelse av att klara det med sin egen kreativa hjärna!

Mål att sträva mot

Skriftlig huvudräkning svarar bra på läroplanens mål att sträva efter i matematik – att eleven "förstår och kan använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande".

För mina elever på mellanstadiet ändrade huvudräkningsmetoden snabbt deras inställning till matematik. Det blev mycket "pratmatte", det blev intressant och spännande att få tänka själv, pröva olika idéer, upptäcka samband och dra slutsatser. När matematiken blir intressant, blir också resultaten goda. En elev som förstår matematikens lagar och möjligheter känner självförtroende. Då blir matematiken spännande och lockar till nya upptäckter.

Problemlösningförmåga

Matematisk förmåga är inte bara att klara uträkningar på ett eller annat sätt, utan också förmågan att lösa problem. Min erfarenhet efter många års undervisning i matematik är att den träning som eleverna får i kreativt och logiskt tänkande när de arbetar med skriftlig huvudräkning gör att de även vid problemlösning hittar andra lösningar än de rent mekaniska. Arbetssättet ledde till ökad förståelse för andra moment som geometri, tidsberäkningar, bråkräkning, procenträkning, ekvationslösning, till och med algebra. Jag, som varit lärare på mellanstadiet i ca 30 år, förstod inte förrän i halvtid hur mycket matematik det fanns hos eleverna när de fick utveckla sina egna tankar.

LITTERATUR

- Rockström, B. (2000). *Skriftlig huvudräkning Metodbok*. Stockholm: Bonnier Utbildning.
- Rockström, B. (2007). *Elevernas textuppgifter Metodbok*. Stockholm: Bonnier Utbildning.
- Rockström, B. *Matteboken 1–6*. Stockholm: Bonnier Utbildning.
- Rockström, B. *Träningshäften Skriftlig huvudräkning*. Stockholm: Bonnier Utbildning.
- Unenge, J. (1985). *Matematikdidaktik för klasslärare*. Lund: Studentlitteratur.