Anne Watson & John Mason

Skillnaden är två

I artikeln diskuteras hur man med annorlunda uppgifter kan uppmuntra och stimulera elever i alla åldrar till att utforska sitt eget tänkande och att tillsammans generera nya idéer.

Tänk dig att du ber dina elever skriva ner två tal som har differensen två. Vad tror du att de skulle göra? Naturligtvis beror ditt svar på vilka elever du har, hur gamla de är, om de är vana vid frågor av den här typen osv. Eller gör det inte? Du kanske befarar att de ska tycka att uppgiften är för enkel, att uppgiften, vid första anblicken, endast verkar lämpa sig för mycket unga elever? Dina elever kanske föreställer sig tal på tallinjen och att man hoppar två steg fram. De kanske föreställer sig ett ”taltåg” med längden två som åker längs ett ”talspår” och som kan stanna på olika ställen. Var kan det stanna? Kan det stanna mellan två heltal, och i så fall, vilka tal skriver eleven ner? Är det viktigt vilket tal som skrivs ner först?

När vi lät en grupp lärarutbildare göra den här uppgiften skrev några ner det minsta talet först. Kanske tänkte de sig en förflyttning längs tallinjen. Andra började med det största talet, kanske tänkte de sig subtraktion. Skillnaden i utförande kan i sig leda till frågan huruvida man kan ha både positiva och negativa differenser.
Gör nu följande uppgift själv:

Skriv ner två tal som har differensen två.

Skriv ner ännu ett par tal med samma differens.

Skriv ner ytterligare ett par.

Vi har använt liknande sekvenser av frågor med många olika elevgrupper och kollegor, och kommit fram till att i stort sett alla, oavsett ålder, försöker göra sina svar så svåra eller intressanta som möjligt. Ofta säger de att det är tråkigt att göra samma sak tre gånger i följd. Det andra svaret är ibland rätt likt det första, men det tredje avviker oftast mycket – det kan innehålla helt andra typer av tal eller vara generaliseringar av de två första.

Anne Watson och John Mason är matematikdidaktiker verksamma vid University of Oxford respektive Open University

Den här uppgiften kan uppenbarligen sätta igång olika sätt att tänka och det leder till många olika svar i en grupp elever. Några väljer små heltal, andra är mer djärva och skriver tal de tycker är väldigt stora. Beroende på tidigare erfarenheter kanske några vågar sig på bråk och decimaltal. Finns det någon som passerar noll, t ex med 1 och (–1), och använder negativa tal? Den här uppgiften kan utan tvekan ge läraren en del information om hur eleverna tänker, men vi vill också gå vidare och föreslå hur man kan uppmuntra eleverna att utveckla sina svar på uppgifter av den här typen.

En poäng med att använda den här sortens uppgifter är att först synliggöra variationen hos svaren i en viss grupp. Sedan tittar vi tillsammans på alla svar och uppmuntrar frågor om de olika svaren, hur olika elever tänkt eller om man inte förstår (eller tror på) vissa svar. Upptäckten att andra tänker annorlunda kan öppna upp eller friska upp medvetandet om dimensioner av möjlig variation. En lärare som nyligen introducerat negativa tal hoppas säkert att de finns med bland elevernas svar. Om det inte dyker upp negativa tal alls kan man genom att lägga på några villkor till uppgiften visa att det finns fler möjligheter att besvara den. Läraren kan t ex be eleverna skriva ner två tal med differensen två som ligger på en annan del av tallinjen. Det kan påminna eleverna om att tallinjen är en modell som kan användas för att hitta fler lösningar. Svaren kan upplysa läraren om ifall elevernas tallinjer har utvidgats till att omfatta de negativa talen. Skulle det vara nytt för dem kan de bli motiverade att i fortsättningen tänka sig tallinjen utvidgad.

Alla som gör uppgiften använder inte tallinjen för att få fram de första svaren. De kan istället använda andra bilder, kanske av en mängd föremål som räknats upp, skrivna matematiska symboler eller geometriska figurer. Tidigare erfarenheter kan bidra till några dominerande mentala bilder som de automatiskt refererar till och som begränsar vilka svarsmöjligheter de har.

Skillnad i tillvägagångssätt

Om en elev föreställer sig en mängd föremål som räknas upp när frågor om "differens" ställs, då är dimensionen av möjlig variation begränsad till små naturliga tal och räckvidden för elevens svar rör sig antagligen från noll och upp till mellan tio och trettio. Vi har hämtat begreppet "dimension of variation" från (Marton & Booth, 1997) och (Runesson,1999, 2001). Till det har vi lagt begreppet "range-of-permissible-change" för att visa att när väl en elev har uppfattat en aspekt hos ett begrepp som en möjlig dimension av variation, så kan det finnas olika uppfattningar om hur mycket aspekten kan tillåtas att variera. Till exempel, om en elev kan föreställa sig en tallinje men endast använder heltal, så är dimensionen av variation tallinjen, men räckvidden hos förändringen är begränsad till de hela talen. Samma dimension av variation kan användas av andra elever men de kan ha utvidgat räckvidden till att också omfatta t ex decimaltal.

Här är några svar på uppgiften som illustrerar hur olika personer kan besvara samma frågor. De verkar använda samma dimension av variation men olika räckvidd hos den tillåtna förändringen. Ett svar såg ut så här.

(7, 9) (6, 8) (198, 196)

Den här personen sa att de två första var tråkiga, valde ett "svårare" tredje par och uppvisade säkerhet i en dimension av variation. Notera att i det sista paret är storleksordningen omkastad. Det betyder att differensen inte är kopplad till en speciell riktning och att personen kan vara medveten om den dimensionen av variation.

(6, 8) (14, 16) (39, 41)

Här har någon "hoppat förbi tio" på tallinjen, kanske medveten om att det är en typisk svårighet för många barn.

(5, 7) (28, 30) (17,5, 19,5)

(2,653, 4,653) (– 8 1/3, – 10 1/3)

I detta exempel har uppgiften utvidgats till en undersökning av hur många olika sorters svar som kan ges. Den här personen verkade fullständigt klar över olika sorters tal. Här är kanske en mer korrekt beskrivning att hon undersökte räckvidden hos den tillåtna ändringen inom samma dimension av variation, nämligen olika typer av tal. När kompetensen och självförtroendet växer kan det som tidigare sågs som olika bli integrerat till en och samma uppfattning.

(17, 19) (11, 13) (3, 5)

Här undersöker någon primtalstvillingar, Genom att kraftigt begränsa räckvidden hos förändringen fokuseras ett ganska avancerat område av matematiken.

(401, 399) ($100_{\text{bas } 2}$, $10_{\text{bas } 2}$) (2×9, 2×8)

Den här personen började med det största talet eftersom det är så de skrivs i en subtraktion. Sedan fortsatte han med ytterligare svar från så många olika områden av matematiken han kunde. Han gav också svaret (11, 1) vilket förvånade oss alla innan han berättade att han tänkte på en urtavla och två klockslag som skiljer sig åt med två timmar, ”eller skulle jag ha sagt 1 och 11?”. Han använde en multidimensionell rymd av tal-lika objekt eller kontexter där tal används på olika sätt. Man kanske också skulle kunna säga, att han på grund av sitt självförtroende och sin erfarenhet, undersökte kontexten som den enda dimensionen av variation. Han la, med ett leende av igenkännande, märke till att 11 och 1 också fungerar om man betraktar dem som tal skrivna i bas två.

Vi menar inte att man kan förvänta sig så här sofistikerade svar från skolelever, men den psykoemotionella naturen hos svaren är typisk. Eleverna gör den mycket öppna frågeställningen till något som känns meningsfullt för dem och som kan utgöra utgångspunkt för fortsatta undersökningar. På det viset kan en till synes elementär uppgift bli ett område för omfattande matematisk aktivitet. Innehållsrikedomen är på inget sätt gömd i uppgiften. Den finns i variationen hos elevernas svar. Läraren kan antingen utveckla innehållet för fortsatta, fördjupande undersökningar av tal och talområden, t ex genom att föreslå begränsningar av uppgiften, eller alternativt, ta bort all utmaning genom att låta eleverna fortsätta med mer eller mindre rutinmässiga övningar i att subtrahera med 2.

Vad menas med olika – vad är generellt?

Vi märker ofta att eleverna gör uppgiften mer komplex för sig själva om det efterfrågas flera exempel, särskilt om de har fått ta del av andra svar och på det viset blivit medvetna om fler dimensioner av variation. Trots det brukar vi ibland använda följande uppgift istället.

Skriv ner två tal som har differensen två.

Skriv ner ett liknande par.

Skriv ner ett par som, på något sätt, skiljer sig från de som du redan använt.

Den här uppgiften kan visa vad elever menar med lika och olika. En elev kan tycka att användning av negativa tal är tillräckligt olika för det tredje svaret, medan en annan kan tycka att det är tillräckligt lika för att kunna ges som det andra svaret. Den här skillnaden ger direkt underlag för en diskussion i klassen. Genom en diskussion om varför de valde tal på olika sätt kan eleverna ges möjlighet att utveckla sin förståelse för vad som menas med ett tal. Man kan gå vidare genom att fråga eleverna om vilka svar som är ovanliga, eller konstiga på något sätt.

Det finns många fler sätt att variera den här uppgiften, t ex kan läraren skriva upp två tal på tavlan och börja med att fråga vad som är lika respektive olika med de två talparen, innan eleverna själva får komma med egna exempel. Brown och Coles (2000) beskriver hur de har använt den enkla men mycket effektiva metoden att etablera frågorna ”vad är lika, vad är olika med …?” som en klassrumsrutin.

Vi antar att de beskrivna resultaten från övningarna, har fått dig att börja tänka på hur man kan generalisera ytterligare. Det är inte något stort steg för en elev att komma fram till ”Jag kan skriva ner vilket tal som helst som det första talet och sen bara lägga till två för att få det andra". Detta prealgebraiska påstående kan enkelt symboliseras, genom att eleven själv väljer en symbol som representant för "vilket tal som helst". Finns det några andra sätt att komma fram till det andra talet? Ja, vi kan ju subtrahera med två istället för att addera, och eleverna kan få komma med förslag på hur man skulle kunna skriva "vilket tal som helst", "addera med två" och "subtrahera med två". Vi har fått en mängd förslag på generaliseringar när vi bett elever:

Beskriv alla par av tal som har differensen två.

Här är några svar:

Talet och talet plus 2

Talet och talet minus 2

$[x, x+2]$

$[a, b]$ där $a - b = 2$

$[a, b]$ där $a - b = 2$ eller $b - a = 2$

Sådana försök till generaliseringar kan vara utgångspunkt för intressanta diskussioner. Är alla möjliga fall inkluderade? Tycker eleverna att symboliseringen är meningsfull och uttrycker den vad de vet? Kan x betyda ett negativt tal eller måste man på något sätt markera om det är negativt t ex genom att skriva ett minustecken framför?

Att variera uppgiften

Den här uppgiften kanske du inte skulle tänka dig att ge mer avancerade elever. Fast om du gjorde det så kanske en fråga om de kan skriva ner två komplexa tal skulle visa om de tolkar differens som avstånd, så att de blir tvungna att tänka i termer av längd och absolutbelopp. Var finns alla komplexa tal med differensen två till ett givet tal? Hur kan man hitta alla vektorer vars differens i längd är två till en given vektor? Vad gäller för två funktioner som har en area på två emellan sig?

Notera hur uppgiften har förändrats lite. Nu tänker vi oss att ett av "talen" i paret är fixerat och att vi ska beskriva mängden av all tänkbara par med utgångspunkt i det fixerade. Vi har också beskrivit en förflyttning ut från den reella tallinjen och antytt att talen inte behöver vara "endimensionella". Under vissa omständigheter kan vektorer och funktioner uppträda som tal. Med andra ord så föreslår vi ett antal, för oss, möjliga dimensioner av variation i uppgiften såväl som i hur uppgiften kan presenteras.

Faktum är att när vi gav uppgiften till några matematikstuderande behövde vi bara vänta tills dessa mer avancerade frågor började ställas. En uppgift som från början verkade trivial genererade flera nya insikter i några hittills vaga begrepp. De studerande, som försökte skapa exempel med integraler, använde ganska enkla funktioner och försökte sedan generalisera samtidigt som de ställde djupgående frågor kring innebörden av "två" i den valda kontexten. De antydde försök att konstruera en dynamisk bild av arean, mellan de två kurvorna, som alltid skulle ha värdet två. Det finns många likheter mellan dessa försök och de yngre elevernas visualisering av en fix sträcka som "åker" längs med tallinjen.

En annan ändring av uppgiften leder till ytterligare variation.

Differensen är $1\frac{1}{2}$. *Ett av talen är* $2\frac{1}{3}$. *Vilka tal kan det andra vara?*

Beskriv förhållandet mellan $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ *och de övriga talen?*

I den här versionen är inte aritmetiken så öppen, men tolkningen av relationen är öppen. Här är några beskrivningar

$2\frac{1}{3}$ är medelvärdet av de två möjliga svaren.

$2\frac{1}{3}$ är mittpunkten mellan de två möjliga talen.

Skillnaden mellan de två möjliga talen är 3, vilket är dubbelt $1\frac{1}{2}$.

Det är en symmetri.

Du kan hoppa åt båda håll från $2\frac{1}{3}$.

Så fort jag fick $\frac{5}{6}$ såg jag direkt att den andra var $3\frac{5}{6}$.

Det var bra för att öva bråkräkning.

Jag tänkte på att pussla ”tårtbitar”, jag såg en bild på en plansch vi hade i skolan inuti huvudet.

Lägg märke till att idén med “tårtbitar” inte på något enkelt sätt hänger ihop med de övriga representationerna. Försök gärna översätta “tårtrepresentationen” till idén med mittpunkt eller medelvärde. Naturligtvis kan uppgiften i den här varianten vara mindre lämplig om bråk inte är relevant. Vi redovisar ändå svaren här för att kunna peka på hur man genom att gemensamt titta på dessa olika beskrivningar kan göra det möjligt att koppla ihop den grafiska idén om mittpunkt med den aritmetiska idén om medelvärde samt den spatiala idén om symmetri.

Olika sätt att visualisera uppgiften kan göra det möjligt för elever att knyta ihop dels skilda delar av matematiken och dels olika representationer av samma matematiska struktur. Uppgiftens utformning sätter elevens eget val i fokus, snarare än att eleven uppmanas utföra beräkningar som är mer eller mindre givna. När en elev själv konstruerar ett objekt och utför beräkningar med detta, i ett sökande efter en hel klass av objekt som uppfyller vissa villkor, blir beräkningarna visserligen utförda, men fokus är på huruvida beräkningarna ger förväntat resultat eller hur själva beräkningen fungerar. Detta förhållningssätt kan ställas mot uppgifter på ett övningsblad där beräkningarna redan är specificerade och där eleven endast behöver ta fram svaren utan någon djupare avsikt.

Mer avancerade differenser

Med gymnasielärare använder vi ofta följande besläktade uppgift som startpunkt för diskussion och för att generera fler exempel. I själva verket kom ”skillnaden är två”-uppgifterna fram i samband med att vi försökte hitta versioner av den följande uppgiften som skulle kunna användas med alla elever i skolan, från de allra yngsta och igenom alla åldersgrupper.

Vi tänker kalla avståndet mellan två lösningar till en andragradsekvation för mellanrotsdistansen.

Vilka andragradsekvationer har mellanrotsdistansen två?

Vi försöker formulera uppgiften på ett sätt som inte leder till lösningar med en speciell metod, t ex grafisk eller algebraisk, men vi upplever det som mycket svårt. Själva ordvalet i uppgiften antyder ofta ett speciellt angreppssätt. Ordet ”ekvation” kan få många att direkt börja skriva algebraiska uttryck som startpunkt. Använder man ordet ”parabel” kan det leda till en grafisk utgångspunkt. Hur som helst så kan uppgiften erbjuda möjligheter att utforska relationerna mellan bland annat dessa två representationer. Den kan leda till experiment med att förskjuta, spegla, förminska och förstora grafiska representationer och att integrera dessa idéer. Den kan också leda till frågor om relationen mellan mellanrotsdistansen och ekvationens diskriminant, eller frågor om hur man kan karakterisera olika typer av andragradsekvationer utifrån deras koefficienter. Ingenstans framgår det att rötterna måste vara reella, så det är fullt möjligt att också beakta komplexa rötter med ”avståndet” två.

Vilken är skillnaden?

Det finns en skillnad mellan den typ av uppgifter som diskuteras här och ”vardagsuppgifter” eller ”rika” uppgifter. Den senare utgår typiskt ifrån komplexa situationer som skall matematiseras, utforskas och tolkas. Uppgifterna som diskuteras här använder elevernas befintliga kunnande och uppfattningar som ingångar till specifika matematiska strukturer. Uppgifterna börjar enkelt och blir mer sammansatta av eleverna själva genom att de diskuterar varandras lösningar, samt genom att läraren villkorar uppgiften och utmanar elevernas konstruktioner.

En central skillnad mellan den här sortens uppgifter och mer traditionella, slutna uppgifter är hur eleverna uppmuntras att utforska sina egna erfarenheter och skapa nya objekt, själva och tillsammans med andra. Vi tänker oss detta som utforskande och utvidgande av varje elevs unika ”exempelområde”.

Vi har funnit att det är mycket effektivt att fråga elever om exempel, när det gäller att generera intressant matematik, speciellt gäller det matematiska idéer som ligger nära elevgruppens kunskapsgräns (Watson & Mason, under tryckning). Människor säger spontant att de gärna vill göra det intressant, att de vill visa varandra vad de kan, visa att de ”hänger med” matematiskt och att de uppskattar möjligheterna att tillsammans med andra medverka till att ”skapa” matematik. Det verkar som att de arbetar med att studera sin första idé och fråga sig själva ”Hur fruktbart är det här exemplet för mig?” eller ”Vilken klass representerar det här exemplet?” och följaktligen ”Vilka andra klasser kan jag representera?”. Kanske skulle det hjälpa elever om dessa frågor mer uttryckligen diskuterades så att deras följande exempel (om de blir ombedda att komma med fler) kan väljas med större medvetenhet om vilka dimensioner och räckvidd de använder implicit. Det faktum att människor spontant utforskar sina egna dimensioner av uppfattad möjlig variation stöder perspektivet, som initierats av Marton & Booth (1997) och utvecklats av Runesson (1999), att lärande består i att bli medveten om nya dimensioner av variation, ny räckvidd för tillåten förändring inom dessa dimensioner samt att dimensioner som tidigare uppfattats som separata fogas samman.

Dessutom, när man ska hantera sammansatta och ovanliga problem, kan det ofta hjälpa att börja med att konstruera ett exempel. Elever verkar bli mer benägna att använda en sådan strategi om de har erfarenhet av detta från sin matematikundervisning.

Vår teoretiska förståelse har växt utifrån vår erfarenhet av att använda uppgifter av det beskrivna slaget och att lyssna på elevers svar. Men teorierna är endast hypoteser än så länge. För oss betyder det mer om vi lyckats göra dig tillräckligt nyfiken och intresserad för att själv försöka använda liknande uppgifter någon gång. Våra försäkringar kan naturligtvis inte på något sätt vara lika övertygande som din egen reflektion kring dina egna erfarenheter. Det som verkligen kan övertyga dig om värdet av att använda den här sortens uppgifter, för att stötta och hjälpa elever att utveckla sitt matematiska tänkande och självförtroende, är om du märker att dina elever, allt eftersom, börjar svara mer och mer sofistikerat, visar en allt större matematisk känsla och utvecklar ett större intresse för matematik som en kreativ aktivitet.

REFERENSER

Brown, L. & Coles, A. (2000). Same/diffe–rent: a ‘natural’ way of learning mathematics. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Japan.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Runesson, U. (1999). *The pedagogy of variation: different ways of handling a mathematical topic. Acta Univertsitatis Gothoburgensis*. Göteborg: Göteborgs universitet.

Runesson, U. (2001). What matters in the mathematics Classroom? Exploring critical differences in the space of learning. In C. Bergsten (Ed.) *Proceedings NORMA 01*. Kristianstad.

Watson A. & Mason, J. (under tryckning). Student-Generated Examples in the Learning of Mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*