Natalia Karlsson & Wiggo Kilborn

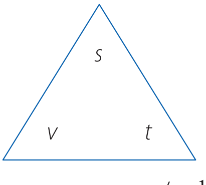
Om proportionalitet

En typ av problem i skolans matematikundervisning som vållar svårigheter för elever och därmed också för deras lärare är de som bygger på proportionalitet. Artikelförfattarna följer här upp en artikel från Nämnaren 2015:3 och diskuterar hur en laboration kan leda eleverna in i proportionalitetstänkande.

På högstadiet, liksom på flera av programmen på gymnasieskolan, har undervisning i matematik ofta präglats av ”de snabba klippens metodik”. Ett skäl till detta är att den konkretisering som är så viktig för yngre elever inte alltid har lett till en abstraktion, alltså en verbal förståelse av det som skulle konkretiseras. Det här innebär att många elever kommer till högstadiet med bristande förmåga att ”analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp” samt att ”föra och följa matematiska resonemang”. Det blir därför betydligt enklare att på högstadiet lära eleverna en färdig formel än att lära dem förstå formelns matematiska innebörd. Som exempel är det lättare att lära eleverna att ”lika tecken ger plus” vid subtraktion eller multiplikation av negativa tal, än att förklara vad som menas med negativa tal och utnyttja att samma räknelagar gäller för negativa tal som för naturliga tal. En sådan uppfattning leder till att man erbjuder eleverna en procedurell kunskap som inte är konceptuellt förankrad. Eftersom en sådan kunskap är svår att översprida till andra områden eller problemtyper, tenderar elevernas kunskaper att bli ett lappverk och de missar de underliggande matematiska strukturer som knyter samman olika områden av matematiken. Eleverna förmår därför inte se att det finns smartare lösningar på ett problem än den formel de ofta har glömt eller inte behärskar. Detta ett vanligt problem även bland dagens lärarstuderande, vilket beskrivs i vår föregående artikel *Vet inte, har inte en aning, kommer inte ihåg.*

Proportionalitet och hastighetsproblem

En typ av problem som vållar stora svårigheter i skolans matematikundervisning är de som bygger på proportionalitet. För att eleverna – på provräkningen eller det nationella provet – ska klara enkla hastighetsproblem lär man av tradition ut formler av följande slag:



Bilden kan utläsas på tre sätt, som $s = v \cdot t$, som $v = s / t$ eller som $t = s / v$ och hjälper eleverna att lösa en del hastighetsproblem i enkla förutsägbara situationer. Men hur löser de följande uppgift?

Malin springer 3,2 km på 17 minuter. Hur lång tid tar det för Malin att springa 4,8 km med samma hastighet?

Här fungerar inte formeln lika bra. Om vi istället använder oss av proportionalitet kan vi utgå från att hastigheten v är konstant. Vi behöver då inte använda oss av enheten km/h utan kan lika gärna utrycka hastigheten i km/minut. Vi få då ekvationerna $v = 3{,}2/17 = 4{,}8/t$. Nu uppstår emellertid ett nytt problem, nämligen att lösa en ekvation med t i nämnaren. Få elever verkar förstå att ekvationen har samma sanningsvärde om de inverterar termerna, vilket ger $17/3{,}2 = t/4{,}8$. Men även den här typen av ekvation brukar vålla svårigheter. Nu är det så att samma matematiska modell kan användas även när man löser problem som handlar om likformighet, tryck, vridmoment, Ohms lag, recept, pris och rabatt mm. Det finns därför all anledning att ägna mer tid åt den här matematiska modellen än vad man gör i dagens skola.

Men, invänder nu läsaren, man ser ju direkt att den andra sträckan är 50 % längre och därmed måste även tiden vara 50 % längre. Javisst, det ser man om man behärskar begreppet proportionalitet, men hur många elever gör det?

Pris och rabatt

En intressant typ av problem är de som handlar om rabatt och pålägg. Här verkar de flesta lärare satsa på att eleverna åtminstone ska klara de enklaste problemen såsom:

Ett par jeans kostar 720 kr. Idag ges 15 % rabatt. Vad kostar byxorna då?

Den enkla formel som många elever lär sig använda är $0{,}15 \cdot 720 = 108$, alltså att först bestämma rabatten. För att beräkna det nya priset utför de sedan subtraktionen $720 - 108 = 612$. Förvånansvärt få elever bestämmer nettopriset genom att ta 85 % av 720 kr. Av det skälet missar eleverna möjligheterna att lösa den här typen av problem med hjälp av proportionalitet. Men den här strategin fungerar inte när uppgifterna är av följande typ:

Vid en rea har butiken sänkt alla priser med 20 %. Stina har handlat kläder för 720 kr. Hur mycket skulle hon ha fått betala om det inte hade varit rea?

När den här uppgiften utprövades vid konstruktionen av Diamantdiagnoserna var det bara cirka 10 % av eleverna som klarade den på våren i årskurs 8. En enkel förklaring till detta är, att här duger inte längre den formel deras lärare satsat på. Däremot är det en enkel uppgift på proportionalitet eftersom priset är proportionellt mot procentsatsen: 720 kronor svarar mot 80 % av det ursprungliga priset P, samtidigt som P svarar mot 100 % av det ursprungliga priset. Sambandet kan tecknas som en ekvation två sätt:

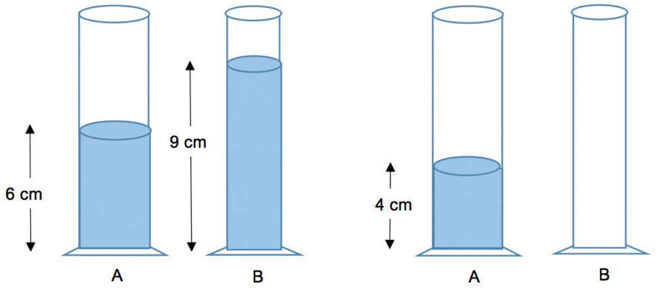
$$\frac{P}{100} = \frac{720}{80} \text{ eller } \frac{P}{720} = \frac{100}{80}$$

Observera att detta är exakt samma matematiska modell som i hastighetsproblemet med Malin.

Vi kan sammanfatta så här: För att lösa matematikrelaterade problem krävs det matematiska modeller. Samtidigt kan vi konstatera att antalet matematiska modeller som krävs för att eleverna ska kunna lösa de problem som förekommer i skolan är begränsat. Det lönar sig därför att satsa på de vanligast förekommande modellerna, såsom proportionalitet. En sådan satsning består av två steg: Att uppfatta innebörden i begreppet och att utföra nödvändiga beräkningar.

En laboration om proportionalitet

När det gäller att uppfatta begreppet proportionalitet kan den typ av laborationer som beskrivs av Leif Lybeck i *Arkimedes i klassrummet – en ämnespedagogisk berättelse* användas. I en av laborationerna använder han sig av två mätglas A och B, där mätglas B är smalare än mätglas A. Man häller först vatten i mätglas A till en höjd av 6 cm. Därefter häller man över vattnet i mätglas B och vattenpelaren når då en höjd av 9 cm. Man börjar därefter om från början och häller vatten i mätglas A till en höjd av 4 cm. Nu är frågan: Hur hög blir vattenpelaren om man häller över vattnet i mätglas B?



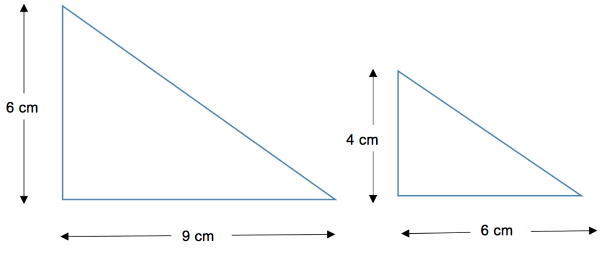
Genom att jämföra de två vattenpelarna i mätglas A inser man att det är 2/3 så mycket vatten i mätglas A den andra gången. Detsamma gäller om man häller över vattnet till mätglas B, där vattenpelarens höjd då blir 2/3 av 9 cm alltså 6 cm. Detta kan mer generellt tecknas $4/6 = x/9$.

Ett alternativ är att jämföra vattenpelaren i B med vattenpelaren i A. Man finner då att vattenpelaren i B är 1,5 gånger större än i A. Den andra gången blir därför höjden av vattenpelaren i B $1{,}5 \cdot 4$ cm. Detta kan mer generellt tecknas $9/6 = x/4$.

Det räcker nu inte att bara uppfatta begreppet proportionalitet. Det gäller också att kunna lösa ekvationer av typen $x/a = b/c$ med olika värden på parametrarna a, b och c. Detta handlar om att använda annulleringslagen för multiplikation och multiplicera båda leden med a. När eleverna misslyckas med detta brukar det bero på att de antingen inte lärt sig lösa ekvationer med hjälp av annulleringslagarna eller att de har negativa erfarenheter av att arbeta med rationella tal – såsom i uppgiften med Malin.

Generalisering av modellen

När eleverna, t ex med hjälp av Lybecks laboration, har sett hur proportionalitet fungerar i en kontext gäller det att visa hur man kan generalisera modellen till andra typer av problem. Här följer ett exempel på en förminskning av en triangel i skala 2:3. Resonemanget blir i det här fallet detsamma som i fallet med mätglasen och även den matematiska modellen blir densamma.



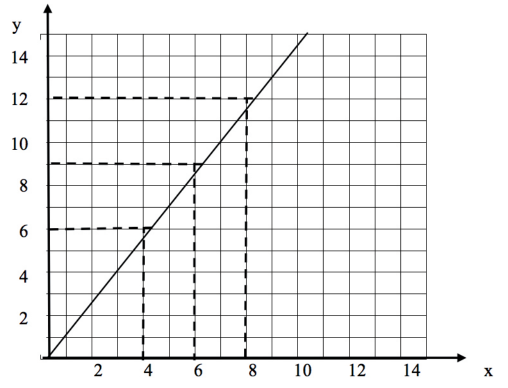
Modellen kan också användas för att lösa uppgifter som

> När spänningen över en resistor är 6 V blir strömstyrkan 9 A. Hur stor blir strömstyrkan om spänningen är 4 V?

eller

> Till ett recept går det åt 6 dl mjöl och 9 dl mjölk. Hur mycket mjölk behöver man till 4 dl mjöl?

Vi knyter nu detta till ekvationen $y = 1{,}5x$ och dess graf, en s k proportionalitet.



I grafen kan vi direkt avläsa att om vattenpelaren i mätglas A är 4 cm så är vattenpelaren i mätglas B 6 cm. Vi kan också direkt avläsa andra samband, t ex att om vattenpelaren i mätglas A är 8 cm så är vattenpelaren i mätglas B 12 cm. När det gäller exemplet med de likformiga trianglarna kan vi direkt i figuren se hur lång den längre kateten är om den kortare kateten är 8 cm. Vi kan till och med se trianglarna avbildade i figuren.

När eleverna har förstått hur användbart begreppet proportionalitet är, för att lösa varierande typer av problem, är det dags att variera parametrarna och öka säkerheten i att utföra beräkningarna.

Det här handlar inte bara om att inse proportionalitetens viktiga roll vid problemlösning. Det handlar också om synen på problemlösning. I dag behandlar läroböcker oftast hastighetsproblem, rabatt, recept mm i olika kapitel, under olika rubriker. Eftersom eleverna inte är medvetna om att den matematiska modellen är densamma, får de varje gång en ny formel och nya problem med en typ av ekvation som de inte lärt sig behärska. Undervisningen i problemlösning bör istället erbjuda eleverna användbara matematiska modeller, som de senare kan använda för att lösa en rad olika problem från olika områden.

LITTERATUR

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2014). *Grundläggande algebra, funktioner, sannolikhetslära och statistik.* Lund: Studentlitteratur.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Konkretisering och undervisning i matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Problemlösning och matematisk modellering.* Malmö: Gleerups.

Lybeck, L. (1981). *Arkimedes i klassen. En ämnespedagogisk berättelse.* (Göteborg Studies in Educational Sciences 37) Göteborg: Acta Universitatus Gothoburgensis.