JÖRAN PETERSSON

Delbarhetsregler

Mikael Passare beskrev i Nämnaren nr 1, 2008 ”Mormors glasögon” i termer av kongruensräkning. Den kan användas för att exempelvis undersöka delbarhet med 3 och 9. Men hur undersöker man om ett tal är delbart med exempelvis 7, 11 eller 13?

Det finns ett antal regler för att avgöra om ett tal är delbart med ett annat tal. För 2 och 5 räcker det med att titta på sista siffran och för 3 och 9 bestämmer siffersumman delbarheten. För exempelvis 7 stryker man sista siffran och sedan subtraherar man den två gånger från den näst sista siffran. Det ursprungliga talet är delbart med 7 om det nya talet är det. Men varför fungerar dessa regler? Hur gör man om man behöver konstruera ett eget test för delbarhet för ett särskilt tal? De matematiska tankarna bakom delbarhetskriterier kan presenteras med både grundläggande och avancerad matematik och kan användas för att stimulera och utmana elever på olika nivåer och även ge en introduktion till algebraiskt tänkande.

Faktorer i basen

Talen 2 och 5 är faktorer i basen 10, varför delbarhet med 2^n avgörs genom att undersöka om 2^n delar talet som består av de n sista siffrorna. Ett exempel: Vilka tal är delbara med 2^3? Undersök exempelvis ett femsiffrigt tal $abcde$. Det kan skrivas som summan $ab000 + cde$. Eftersom den första delen kan skrivas som $ab \cdot 2^3 \cdot 5^3$ är det uppenbart delbart med 2^3. Det återstår därför att undersöka om talet cde, som utgörs av de tre sista siffrorna är delbart med 2^3. Detta resonemang kan generaliseras till potenser n av en faktor i en godtycklig bas.

Delbarhet med 9 och 11

Delbarhet med 9 visas enklast med ett exempel. Notera att exempelvis ett femsiffrigt tal $abcde$ kan skrivas

$$a(9999+1)+b(999+1)+c(99+1)+d(9+1)+e=$$

$$(9999a+999b+99c+9d)+(a+b+c+d+e)$$

Den första parentesen är uppenbart delbar med 9 (och även med 3). Delbarheten med 9 (och 3) beror därför på om siffersumman $a+b+c+d+e$ är delbar med dessa tal. Delbarhet med 11 kan avgöras på ett liknande sätt. Skriv det femsiffriga talet som

$$a(11110-1111+1)+b(1111-110-1)+c(110-11+1)+d(11-1)+e=$$

$$(a(11110-1111)+b(1111-110)+c(110-11)+d11)+(a-b+c-d+e)$$

Notera att andra ledets första parentes faktiskt är delbar med 11 eftersom exempelvis $11\,110 = 11\,000 + 110 = 11 \cdot 101$. Delbarheten hänger därför på den andra parentesen, som är en siffersumma med växlande tecken och positivt tecken sist.

Ett mera avancerat men mindre omständligt sätt att visa samma sak är följande sätt. Notera att $10 = 11 - 1$ och skriv om det femsiffriga talet *abcde* som:

$$a(11-1)^4 + b(11-1)^3 + c(11-1)^2 + d(11-1) + e$$

Notera sedan att när man utvecklar ett uttryck $(x+y)^n$ så finns det bara en term som saknar faktorn x, nämligen y^n. Med $x=11$ och $y=-1$ får vi det vi har och det femsiffriga talet *abcde* kan skrivas så här:

$$abcde = 11 \cdot (heltal) + a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e =$$

$$11 \cdot (heltal) + a - b + c - d + e$$

Vi får en siffersumma med omväxlande tecken. Samma idé kan användas även för delbarhet med 9 varvid $x=9$ och $y=1$. Resultatet blir förstås som tidigare, att siffersumman avgör delbarheten. Detta resonemang kan man generalisera till en godtycklig bas b skriven som $b = x + y$ med resultatet att talet i basen b är delbart med $b-1$ om dess siffersumma är delbar med $b-1$ och delbar med $b+1$ om siffersumman med växlande tecken är det.

Delbarhet med 7

Under ordet "delbarhetskriterier" i Wahlström och Widstrands Matematiklexikon (Thompson, 1991) finns följande *Algoritm 1 för delbarhet med 7*:

1 Stryk entalssiffran.

2 Subtrahera dubbla entalssiffran från det återstående talet.

3 Upprepa detta tills du kan avgöra om återstoden passar i sjuans tabell.

4 Om återstoden är delbar med 7 så är det ursprungliga talet delbart med 7, annars inte.

Ett exempel: Är 2373 delbart med 7? Miniräknaren säger "ja", men hur ser algoritmen ovan ut?

- Stryk entalet och få 237. Subtrahera dubbla entalet och få $237 - 2 \cdot 3 = 231$.
- Upprepa: Stryk entalet och få 23. Subtrahera dubbla entalet och få $23 - 2 \cdot 1 = 21$.
- Talet 21 finns i sjuans tabell varför 2373 är delbart med 7.

Varför fungerar algoritmen? Jag börjar med en annan algoritm som tydligare förklarar huvudtanken i algoritmen ovan, nämligen att subtrahera multipler av 7 så att entalssiffran blir noll. Det är principen för *Algoritm 2 för delbarhet med 7.*

Subtrahera från 2373 ett tal som är delbart med 7 och samma slutsiffra som 2373, exempelvis $9 \cdot 7 = 63$. Återstoden blir $2373 - 63 = 2310$. Här utnyttjar man att differensen mellan två tal, som båda är delbara med 7, också är delbar med 7. 2373 måste alltså vara delbart med 7 om 2310 är det, och omvänt. Eftersom $2310 = 231 \cdot 10$ och 10 inte delas av 7 är 2310 delbart med 7 om 231 är delbart med 7 (och omvänt). Vi undersöker därför talet 231.

Upprepa detta: Subtrahera ett tal som är delbart med 7 och som har samma slutsiffra som 231, exempelvis $3 \cdot 7 = 21$. Återstoden blir $231 - 21 = 210$. Dividera med 10 igen och få 21. Återstoden 21 finns i sjuans tabell och eftersom vi bara har subtraherat multiplar av 7 måste det ursprungliga talet 2373 vara delbart med 7.

I algoritm 2 måste vi hela tiden fundera över vilken multipel av sju, som vi ska subtrahera. Det behöver man inte tänka på i algoritm 1, eftersom den alltid ser till att subtrahera exakt entalssiffran samt ett ytterligare tal som inte drabbar entalssiffran. Men hur går det till? Finns det en multipel av 7 som alltid slutar på entalssiffran? Ja det gör det: $21 \cdot$ *entalssiffran* har denna egenskap och motsvarar algoritm 1. Stegen i algoritmen blir $2373 - 3 \cdot 21 = 2310$ och $231 - 1 \cdot 21 = 210$, som är delbart med 7. För att tydliggöra att det faktiskt motsvarar algoritm 1 kan vi skriva om den så här: $2373 - 3 \cdot 21 = (2370 + 3) - (3 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 3)$.

Med enbart sifferexempel är det svårt att förstå varför denna regel fungerar. Med ett tal *abc* skrivet i bokstäver avslöjar den dock sin hemlighet:

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & & 2c & c \\ \hline & d & e & 0 \end{array} \qquad abc - 21c = abc - 7 \cdot 3c$$

Att subtrahera c från entalet och $2c$ från tiotalet betyder att subtrahera sammanlagt $21c = 7 \cdot 3c$, vilket ju är delbart med 7. Regeln är alltså en algoritm som innebär att man subtraherar ett tal som garanterat är delbart med 7 och som gör att sista siffran blir noll. I nästa steg behöver man bara studera talet $de0/10 = de$, som ju har en siffra mindre. Man upprepar subtraktionssteget tills det resterande passar in i sjuans tabell. Får man exempelvis 98 så blir nästa tal -7, vilket också är delbart med 7.

En naturlig fråga är om algoritmen fungerar framifrån också. Låt oss pröva! För exempelvis talet 546 ser beräkningarna ut så här: En multipel av sju med ett som första siffra är $2 \cdot 7 = 14$. Algoritmen blir att stryka första siffran och subtrahera den fyra gånger i andra siffran, dvs $546 - 5 \cdot 140 = -154$. Nästa steg blir $-154 + 1 \cdot 140 = -14$, som ju är delbart med 7. Om man vid behov adderar i stället för subtraherar, fungerar det alltså att räkna även framifrån, men det är inte lika smidigt som att räkna bakifrån.

En av mina studenter föreslog under en tentamen en alternativ algoritm. Istället för att subtrahera så att entalssiffran blir noll, går det bra att addera så att heltalssiffran blir noll. *Algoritm 4 för delbarhet med 7* blir då som algoritm 1 men steg 2 blir ”Addera femdubbla entalssiffran till det återstående talet”. Varför fungerar denna algoritm? Ja, det kanske läsarens ambitiösa elever kan fundera ut. De teoretiska verktygen finns i denna artikel.

Delbarhet med 13

Hur prövar man då delbarhet med 13? Jo, det går att använda samma metod som för 7. Även här vill vi subtrahera så att entalssiffran blir noll. Leta i 13:s multiplikationstabell ett tal som slutar på ett: $13 \cdot 7 = 91$. Det motsvarar att stryka entalssiffran och subtrahera $9 \cdot$*entalssiffran* från återstoden. Låt oss pröva algoritmen på 1716: Steg 1 ger $171 - 9 \cdot 6 = 117$ och steg 2 ger $11 - 9 \cdot 7 = -52$, som ju finns i 13:s ”tabell”.

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & & 9c & c \\ \hline & d & e & 0 \end{array} \qquad abc - 91c = abc - 13 \cdot 7c$$

Upprepa steget i algoritmen tills det resterande talet hamnar i trettons tabell. Idén går alltså att generalisera.

Motsvarande tal för delbarhet med 19 är produkten $9 \cdot 19 = 171$, som ju slutar på ett. Det innebär att stryka entalssiffran och subtrahera den sju gånger från tiotalssiffran och en gång från hundratalssiffran. Delbarhet med talet 41 är enklare – stryk entalssiffran och subtrahera den fyra gånger från tiotalssiffran. Metoden kan alltså generaliseras till att multiplicera delaren d med ett heltal k så att produkten dk har en etta i entalssiffran. Det betyder att delaren d måste ha entalssiffran 3, 7 eller 9 – Varför? Sedan får man subtrahera entalssiffran dk gånger och därefter dividera med tio. Upprepa detta tills det resterande talet finns i multiplikationstabellen för delaren d.

LITTERATUR

Thompson, J. (1991). *Wahlström & Widstrands matematiklexikon*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.

Passare, M. (2008). Mormors glasögon och räkning modulo 9. *Nämnaren*, 35 (1), 31.