Per-Eskil Persson

Behöver alla lära sig algebra?

Finns det något sådant som ”medborgarfärdigheter” i algebra, och vad omfattar den i så fall? Användning av algebra i yrkes- och privatliv, samt hur den behandlas i undervisningen diskuteras i ett framtidsperspektiv. Vissa resultat från en konferens i Melbourne 2001, presenteras i artikeln.

När jag vill lära mig någonting nytt, vill jag känna mig motiverad att ta itu med den arbetsinsats det förmodligen innebär. Det gäller naturligtvis för alla människor, inte minst för våra elever. Vi tänker oss en klass, som just har börjat med ett algebraavsnitt i matematiken. Det är trögt och jobbigt för många, och efter en stund räcker en elev upp handen och frågar:

– *Magistern, när kommer vi nånsin att få användning för det här?*

Läraren svarar hastigt och förmodligen utan att tänka sig för:

– *Jo du, din pappa använder det nog hela tiden, ja varenda dag, tror jag!*

Men med det svaret begår han ett stort misstag, speciellt som den företagsamma eleven går hem och kontrollerar svaret med sin pappa, som är målarmästare. Nästa dag kommer eleven till matematiklektionen och berättar förbryllad och samtidigt en aning triumferande vad pappa svarat:

– *Algebra? Det där med x och y ? Jag har ingen aning om vad det där handlade om. Jag hade alltid så svårt med matten.*

Per-Eskil Persson är lärare vid Klippans gymnasieskola

Är då verkligen algebra användbart för en majoritet av befolkningen, alltså bortsett från matematiklärare, professionella matematiker eller naturvetare? Om man gör en rundfråga bland några slumpvis utvalda personer med lydelsen ”Har du nånsin fått användning för något av den algebra du lärde dig i skolan?”, så kan man få svar som:

Busschaufför:
– *Aldrig. Jag förstod något av det i huvudet, men jag kunde aldrig skriva ner det.*

SO-lärare: – *Algebra? Åh, jag kommer ihåg, om man har 2 och sedan en parentes och sedan a plus b, så blir det 2a och 2b. Det är väl rätt?*

Kassabiträde:
– *Algebra? Det minns jag inget av. Vad handlade det om?*

Föreläsare i litteratur:
– *Algebra! Jag förstod det aldrig. Jag hatade matte och var urdålig i det.*

Journalist:
– *Aldrig, men jag tyckte om problemlösning i skolan.*

Elingenjör:
– *Ja, jag arbetar med formler hela tiden, det*

är väl algebra? Jag arbetar alltid med Excel. Det är allt jag behöver. Jag vet ungefär vad svaren ska bli, det är viktigt.
Systemtekniker:
– *Nej. För att lösa ett problem skriver jag ett program, antagligen i C eller Java.*
(Vissa exempel från MacGregor, 2001)

De här exemplen verkar ju mycket nedslående. Många, kanske de flesta, anser inte att de haft någon som helst nytta av algebra i sina liv. En del använder datorteknik med matematiska inslag i sitt arbete, men det är helt skilt från den typ av algebra de lärde sig i skolan, bortsett från förståelse av formler. Då skulle alltså slutsatsen bli, att vi slösar bort stor energi och en massa tid på ett moment i skolan, som bara ett litet fåtal personer kommer att ha nytta av i sitt fortsatta liv? Dessutom är det ett avsnitt, som i alla tider varit en svår stötesten för eleverna, med misslyckanden och, i värsta fall, en negativ inställning till matematiken som följd. Kan det verkligen vara försvarbart att ha kvar algebra i grundskolan, när för många elever tiden så väl behövs för aritmetiken, ”vanlig räkning”?

Algebra i grundskolan

Vad står det då om algebra i målen för undervisningen i matematik i grundskolan? Ofta fokuserar man på de s k *uppnåendemålen*:

I slutet av det femte skolåret:

– *förstå och kunna använda addition, subtraktion, multiplikation och division samt kunna upptäcka talmönster och bestämma obekanta tal i enkla formler.*

I slutet av det nionde skolåret:

– *kunna tolka och använda enkla formler, lösa enkla ekvationer, samt kunna tolka och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser.*

Dessa punkter, tagna ur sitt sammanhang, har väldigt magert innehåll, men det är viktigt att man läser avsnitten i ämnesplanen om matematikens syfte och roll samt karaktär och uppbyggnad. Där betonas vikten av kunna utöva och kommunicera matematik i olika meningsfulla och relevanta situationer i livet. Problem av skilda slag ska kunna formuleras i matematiska modeller, på vilka ett så brett spektrum som möjligt av matematiska metoder ska tillämpas. Här kommer algebran in som ett särskilt kraftfullt problemlösningsverktyg och som ett naturligt språk att arbeta i. Man måste också kunna tolka, förstå och värdera de resultat man uppnått med sina beräkningar. Under *Mål att sträva mot* står att skolan ska sträva efter att eleven:

– *utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen.*

Vidare står att strävan ska vara att eleven utvecklar sin förmåga att förstå och använda:

– *grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, ekvationer och olikheter.*

Är det då så att det som står i strävansmålen gäller samtliga elever, alltså även de som har stora matematiksvårigheter? Ja, jag vill hävda det, även om varje elev inte kommer att klara av dessa mål. Alla ska åtminstone få chansen att möta algebran, men på sina egna villkor och efter egen förmåga.

Algebraundervisningen kan i stället placeras in som ett stråk genom hela grundskolans och gymnasiets matematik från prealgebran, då algebraiska symboler ännu inte används, via inledande algebra med algebraiska bokstavssymboler till algebra, då de används fullt ut i problemlösning och som bas för ny kunskap.

(Bergsten m fl, 1997, s 25)

Den allmänna tendensen, och det gäller världen över, är att man börjar med mönster och talmönster samt samband och relationer tidigt i skolan, kanske redan i förskolan. Dessa två räknas ofta som kungsvägarna till den egentliga algebran (Bednarz m fl, 1996). Man anser inte som tidigare att exempelvis införandet av bokstavssymboler måste vänta till en viss ålder, utan det kan ske när eleverna är mogna för det och när situationen är den rätta. Dock måste man se upp med att förmågan att höja abstraktionsnivån är mycket individuell och att vissa elever kan ha stora svårigheter med att förstå symbolerna långt upp i åldrarna (Sfard & Linchevski, 1994; Brekke, 2001). Det är av avgörande betydelse att algebran införs i ett sammanhang och inte som ett lösryckt avsnitt av matematiken med en uppsättning regler, som för eleverna ter sig ganska meningslösa.

Algebrakonferens i Melbourne

I december 2001 anordnades den tolfte ICMI studiekonferensen i Melbourne, Australien. ICMI står för *International Commission on Mathematical Instruction* och är en organisation, som bildades i början på 1900-talet, men numera är underställd IMU, *International Mathematical Union*. Denna är en sammanslutning av länder, och varje land representeras av en kommitté av matematiker och matematikutbildare. Man anordnar även större konferenser med många deltagare, ICME (*International Congress on Mathematical Education*), och nästa sådan går av stapeln i Köpenhamn 2004.

Syftet med en ICMI-studie är att fokusera på ett visst område inom matematikutbildning. Innehållet bestäms av ett s k *Discussion Document*. Personer som arbetar med forskning inom området inbjuds att inkomma med konferensbidrag. En relativt liten grupp (c:a 150 personer) väljs ut för konferensen, som består av föreläsningar, presentationer av forskning, arbetsgrupper mm. Varje arbetsgrupp ska sedan skriva ett kapitel i den konferensrapport, som blir slutresultatet, och som ges ut i bokform.

Ämnet för konferensen i Melbourne var *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* och nio arbetsgrupper tog sig an delområdena:

- Approaches to algebra
- Computer algebra systems (CAS)
- Early algebra
- History
- Symbols / language
- Teacher' knowledge for teaching algebra
- Technological environments
- Tertiary
- Why algebra? / What algebra?

Jag hade förmånen att få delta i denna konferens och bidrog med en föredragning baserad på den studie jag gjort tillsammans med Tomas Wennström, och som presenterats i en rad rapporter samt i två artiklar i Nämnaren (Persson & Wennström, 2000; 2002). Gruppen jag valde att arbeta i var den sista, *Why algebra? / What algebra?*, och vi tog oss an problemet varför algebra ska finnas med i matematikundervisningen och vilken slags algebra som bör tas upp. Dessa båda är naturligtvis svåra, men mycket grundläggande frågor. För att inte inkräkta på de andra gruppernas område, t ex *Approaches to algebra* eller *Early algebra*, valde vi att huvudsakligen arbeta med att dels fastställa skälen till varför algebra bör läras av i stort sett samtliga skolelever, och dels försöka uttrycka vad vi menar är basfärdigheter i algebra för de flesta elever, som genomgått grundläggande utbildning. Hos oss bör det motsvara vad man kan efter år 9 i grundskolan eller efter att ha läst Matematik A-kursen på gymnasiet. Man skulle kunna kalla det ”medborgarfärdigheter” i algebra.

Varför algebra för alla?

Skälen till varför i stort sett alla elever bör möta algebra i skolan kan naturligtvis struktureras på många sätt. Här kommer de punkter vi enades om i gruppen:

- Samhället ställer ökade krav på matematiskt kunnande.

I vårt moderna samhälle ställs vi dagligen inför situationer, där vi måste använda våra matematiska färdigheter. Algebra handlar bl a om att kunna använda olika former av abstrakta representationer i situationer, där enbart siffror och tal blir alltför oöverskådliga eller klumpiga. Det rör sig om variabler, parametrar, formler, men även om tabeller och grafer som beskriver samband av skilda slag. Varje gång man läser en dagstidning, när man sköter sin ekonomi, när man ska sätta sig in i och ta ställning i olika samhällsfrågor, krävs detta kunnande. Och att det moderna arbetslivet kräver mer avancerat kunnande är vi alla medvetna om. Man kan faktiskt påstå att matematiskt kunnande, och däri inbegrips algebraiskt kunnande, är en demokratisk rättighet. I OECD:s undersökning PISA 2000 (se t ex Skolverket, 2001 eller PISA homepage) ingick som en del vad man kallar *mathematical literacy*. Det kan översättas som *matematisk kunnighet*, men termen *literacy* implicerar något mer, en grundläggande färdighet parallell med läs- och skrivkunnighet. PISA delar upp den matematiska kunnigheten i åtta kompetenser, varav tre har direkt algebrainnehåll: *Färdighet i att använda matematiska modeller, Färdighet i att använda olika representationer* samt *Symbolisk, formell och teknisk färdighet*. Varje kompetens har tre kompetensklasser, som representerar olika abstraktionsnivåer. Exempelvis kan klass 1 för en uppgift innebära att man kan upptäcka ett talmönster, klass 2 att man kan använda en variabel för att göra beräkningar i en formel, och klass 3 att man själv kan formalisera och generalisera problemet.

- Ny teknologi kräver symbolisering.

Vi upplever alla hur den moderna elektroniken, i synnerhet IT-tekniken, ständigt skjuter fram gränsen för vad vi behöver kunna, även då matematiskt. Miniräknarna har inneburit en förändring av innehållet i matematikundervisningen. De underlättar på många sätt, men de ställer också allt högre krav på förmåga att hantera abstrakta representationer. Inte minst gäller det grafräknarna, som nu börjar användas också på grundskolan. Baskunnande vad gäller datoranvändning inbegriper numera t ex att man ska klara att använda kalkylprogram. Om man alls ska kunna utnyttja funktionerna, måste man ha en grundläggande förståelse av variabler, även om dessa ser lite annorlunda ut än i matematikböckerna. För dem, som även tänker sig att utföra någon form av programmering, är algebran en nödvändig grund. Varje program har en strikt logisk grund som egentligen går längre än skolmatematiken. Man skiljer t ex på de två användningarna av likhetstecken, tilldelning/beräkning och jämförelse/balans.

- Likvärdiga karriärmöjligheter.

och

- Nyckel till vidare matematikstudier.

Vi talar idag om livslångt lärande, om att alla människor ska ha möjlighet att vidareutbilda sig, att avancera inom sitt yrkesområde eller att byta till något helt nytt yrkesområde. Under den långa skoltiden ska eleverna så långt som möjligt kunna byta inriktning när deras intressen förändras, och efter gymnasiet ska alla uppnå grundläggande högskolebehörighet. Eftersom kunnighet i algebra är nödvändig för studier i matematik (Matematik B och vidare), är det önskvärt att alla får en bra grund att bygga på. Nekar man vissa elever möjligheten att komma i kontakt med algebra, stänger man också många av deras möjligheter att senare kunna fortsätta sin utbildning. Här handlar det återigen om en demokratisk rättighet: likvärdiga möjligheter att utveckla och förkovra sig.

- Ett naturligt språk för problemlösning.

och

- Stärker förmågan att föra resonemang, dra slutsatser och kritiskt analysera.

Som tidigare sagts, betonas nu alltmera algebrans användning som kraftfullt problemlösningsverktyg. Algebraisk symbolism är ett standardmedium för exakt kommunikation om tal, samband mellan tal (funktioner) och om matematiska begrepp överhuvudtaget. Med användning av algebran kan man angripa betydligt mer avancerade problemställningar, och man får en bättre överblick över problemställningen genom de generaliseringar den ger möjlighet till. Exempelvis kan man på ett helt annat sätt bedöma gjorda beräkningars giltighet eller riktigheten i diagram vid läsning av artiklar i tidningar eller i TV-program.

- Ger möjlighet till intellektuell utmaning.

och

- Människan strävar alltid efter att höja sin abstraktionsnivå.

I den kognitiva utvecklingen från födelsen och framåt förändras vårt abstrakta tänkande mot allt högre nivåer. Detta finns inbyggt i varje människa och är en drivkraft för ett ständigt nytt lärande och sökandet efter nytt tänkande. Det är ingen händelse att många är så roade av gåtor, av knepiga matematiska problem, av korsordslösning mm. Den lustfyllda utmaningen, leken, spelet, problemet, ger en tillfredsställelse i att klara av den, som inte har någon koppling till användbarheten av det man gör. Visst är det viktigt att man använder sig av verklighetsanknutna problem i matematikundervisningen, men minst lika meningsfullt ter det sig för eleverna med problem, som egentligen bara är en intellektuell utmaning. Dessutom är dessa ofta mycket roligare att arbeta med, eftersom de inte har verkligheten som begränsning. En väsentlig del av den matematik vi idag använder, har ursprungligen startat som en intellektuell lek hos matematikerna. Om vi vill att matematiken ska uppfattas som något roligt och lustfyllt, måste vi leka mera med den.

Basfärdigheter i algebra

Arbetsgruppen i Melbourne tog också fram en lista på vad vi anser vara algebrafärdigheter, som i stort sett varje elev ska ha, när hon/han genomgått grundläggande utbildning. Man kan kalla det *minimifärdigheter.* Observera att många elever kommer att lära sig betydligt mera än målen som tas upp här. Hur mycket är naturligtvis en individuell fråga och beror t ex på hur planerna för fortsatt utbildning ser ut. Det exakta innehållet i varje punkt kan givetvis diskuteras, men vi var eniga om de övergripande målen:

1. Sätta in i formler.

Kunna förstå och använda sig av formler för olika beräkningar. Formlerna representerar de vanligaste funktionstyperna:

– Proportionella, som $y = 25 \cdot x$

– Linjära, $F = 1{,}8 \cdot C + 32$

– Reciproka, $p = 100/n$

– Kvadratiska, $y = x^2 - 6x$

– Exponentiella, $K = 10\,000 \cdot 1{,}03^t$

Även mer komplexa funktioner kan undersökas, om man har möjlighet att använda lämpliga miniräknare, i synnerhet grafräknare. Viktigt att tänka på i denna som i de kommande punkterna är dock, att inte göra framställningen alltför teoretisk. Man kan t ex istället för ”funktion” helt enkelt säga ”samband”, som inte är så belastat med definitionsproblem och teoretisk bakgrund.

2. Göra värdetabeller, plotta och tolka grafer av funktioner.

I tolkningen ligger förmåga att ta fram intressanta egenskaper hos grafen, såsom maximi- eller minimipunkter, nollställen, lutning mm, och sedan ha en förståelse för vad dessa representerar för den situation som grafen är en bild av.

3. Tolka och skissa grafer av situationer och händelser.

Här är det exakta inprickandet av punkter i grafen av mindre betydelse, och tonvikten istället lagd på kopplingen mellan verkliga händelseförlopp och hur de representeras som graf. Samma intressanta egenskaper som i föregående punkt ska kunna tas fram.

4. Lösa ekvationer av typerna $f(x)=0$ och $f(x)=g(x)$ grafiskt.

Enkla grafer ska kunna plottas manuellt och svårare med hjälp av grafräknare. Nollställen och skärningspunkter ska kunna bestämmas och tolkas. Även olikheterna $f(x)>g(x)$ samt $f(x)<g(x)$ bör kunna lösas grafiskt, men återigen måste påpekas att dessa symboler i den grundläggande undervisningen inte måste användas, utan man uttrycker sig med ord som ”större än” osv. Exempel på ekvationer:

$x^2 - 25x = 0$,
$12 \cdot k + 10 = 15 \cdot k$ eller
$100 \cdot 1{,}23^t = 100 + 50 \cdot t$

5. Lösa linjära ekvationer manuellt.

Med någon metod, ”gissa och pröva”, övertäckning, ”göra lika på båda sidor”, etc., ska man kunna lösa relativt enkla linjära ekvationer med en variabel. Vissa typer av förenklingar måste här finnas med för att det ska gå att lösa exempelvis, $3x + x + 3x + x = 56$ och även enkel inmultiplicering av ett tal i en parentes bör ingå, men i övrigt måste stor försiktighet med svårare algebraregler rekommenderas.

6. Översätta mellan olika representationer.

Ett problem kan representeras på olika sätt, och här delas dessa in i fyra huvudtyper, Situationer/Text, Tabeller, Grafer och Formler/Symboler (se tabellen).

De färdigheter, som markerats med fet stil, är de som lagts stor tonvikt på i traditionell algebraundervisning. Speciellt omskrivning och manipulering har tyvärr

Från / Till	Situationer Text	Tabeller	Grafer	Formler Symboler
Situationer Text		tolka tabeller	***tolka grafer***	känna igen och tolka
Tabeller	samla in data		**avläsa punkter**	**beräkna värden**
Grafer	***skissa grafer***	**plotta grafer**		**plotta funktioner**
Formler Symboler	***modellera situationer***	anpassa formel till data	anpassa funktion till graf	**omskriva, manipulera**

(bygger på Janvier, 1984)

ofta getts stort utrymme, och eleverna har inte förstått vad de sysslat med eller vad det ska användas till när det plockats ut ur sitt sammanhang. Istället lyfts de punkter, som markerats med kursiv stil alltmer fram i dagens undervisning, och särskilt då modelleringsfärdigheterna. Även i PISA-dokumenten poängteras just modellering som en prioriterad förmåga, och man nämner det matematiska tänkandet, generalisering och insikt. Detta leder fram till den avslutande punkten:

7. Kunna använda samtliga färdigheter för att formulera lämpliga modeller med tal, grafer och funktioner.

Sammanfattning

Det står ganska klart, att algebra är ett område av matematiken, som kommer att förstärkas snarare än försvagas i framtidens skolundervisning. Särskilt aspekten av algebra som ett kraftfullt problemlösningsverktyg läggs allt större vikt vid, och för att klara detta måste vi ta ny teknologi i form av datorer och miniräknare till hjälp. Världen över arbetar man för att de väsentligaste algebrafärdigheterna ska kunna ges till en allt större del av befolkningen. De är en viktig del av den grundläggande matematikkunskap, som vid sidan av läs- och skrivkunnighet är nödvändig för att man ska kunna klara sig väl i det moderna samhället. Så här beskrivs det i PISA-programmet:

> *Mathematics literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgements and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen.*
>
> (hämtat 020827 från *http://www.pisa.oecd.org/pisa/math.htm*)

Vad beror då sådana uppfattningar på som yrkespersonerna i början av artikeln omfattade? Ja, i många fall är det helt enkelt så, att man faktiskt inte ser någon nytta av algebran i sitt yrke. Det är först när man tänker byta till något nytt eller man vill studera vidare, som behoven kan visa sig. Också i privatlivet kan nyttan av algebrakunskaper begränsa sig till relativt enkla saker som t ex tolkning av diagram i en dagstidning eller att jämföra olika taxor när man vill byta elleverantör. Men i sådana fall håller sig algebran ganska mycket i skymundan, så att man inte är medveten om att den ligger bakom. Ordet "algebra" ger för många en association till mystiska förenklingsövningar och ekvationslösningar, som man med rätta inte ser någon direkt nytta av. För att göra algebra meningsfull måste vi alltså lägga stor omsorg vid att den ska användas i för eleverna synliga och välmotiverade sammanhang. Färdighetsträning måste vi naturligtvis ha, men det är nödvändigt att alla förstår varför.

En annan viktig aspekt är hur vi använder algebrasymbolerna. Elingenjören och systemteknikern ovan tyckte inte, att de använde algebra i sitt arbete av det skälet att de inte kunde identifiera beräkningsrutiner i Excel och programmeringsspråk med skolalgebran. Det ser annorlunda ut, men är i högsta grad fråga om algebra i praktisk användning. En viktig framtidsfråga måste vara om symbolspråket i vår skolalgebra verkligen är det bästa tänkbara. Måste variabler alltid bestå av en enda bokstav? Kanske man istället ska ha möjlighet att använda hela ord som man gör i programmering? Eller ska man införa två olika tecken för de skilda sätten man använder likhetstecken? Hur är det med minustecknets användning? Det här är självklart mycket viktiga frågor, som en av grupperna i Melbournekonferensen (*Symbols / language*) arbetade speciellt med. Deras delstudie kommer vi att kunna ta del av i den kommande boken.

Avslutningsvis måste jag konstatera, att i en jämförelse med hur man arbetar med algebra i matematikundervisningen i olika länder, verkar utvecklingen gå åt rätt håll i Sverige. Vi har kommit en bit på väg till omställning från förenklingsalgebra till problemlösningsalgebra, även om vi långt ifrån är där. Här spelar en tidskrift som Nämnaren en stor roll genom att belysa och diskutera dessa frågor samt ge goda exempel på hur man kan arbeta. Men det är väsentligt att de nya tankarna når ut till alla lärare, och då blir de nyskrivna läroböckerna en nyckel i sammanhanget. Det är mycket tillfredsställande att se hur författarna nu tar tag i den tidiga algebran med hjälp av mönster och samband på ett bra och jordnära sätt, som också är roligt och engagerande för eleverna. Som lärare måste vi också se till att algebraundervisningen följer en röd tråd från förskola till gymnasium, så att eleverna känner igen sig och kan bygga på sina tidigare erfarenheter när nya algebramoment ska behandlas. Ett samarbete över de gamla stadiegränserna är lika nödvändigt för algebran som för alla matematikmomenten om vi ska nå målet att alla människor uppnår ”medborgarfärdigheter” i matematik.

REFERENSER

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren TEMA*. Kungälv: NCM, Göteborgs Universitet.

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper? I H. Chick m fl (red.) *The Future of the Teaching and of the Learning of Algebra. Volume 1.* University of Melbourne.

Ekenstam, A. & Greger, K. (1987). On children's understanding of elementary algebra. *Journal of Structural Learning 9*, 303-315.

Janvier, C. (1984). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (red.) *Problems of representation in th eteaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

MacGregor, M. (2001). Does Learning of Algebra Benefit Most People? I H. Chick m fl (red.) *The Future of the Teaching and of the Learning of Algebra. Volume 2*. University of Melbourne.

Persson, P. & Wennström, T. (2000). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnaren 27(2)*, 53 - 61.

Persson, P. & Wennström, T. (2002). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren 29 (1)*, 22 - 29.

PISA homepage. URL: *www.pisa.oecd.org*

Sfard, A. & Linchevski (1994). The gains and pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*, 191-228.

Skolverket (2001). *PISA 2000. Svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Rapport 209.*