

Avprickning

Avprickning är användbart inte bara när man är protokollförare i brännboll. Här i Sverige gör de flesta avprickning genom att rita "pinnar" i grupper om fem, den femte tvärs över de första fyra. **Andrejs Dunkels**, Luleå, redovisar här förfaranden som också bygger på grupper om fem från några andra länder. Vidare presenteras en avprickningsmetod som bygger på tio objekt inom varje grupp.

Något som man brukar få repetera när man lär sig beskrivande statistik är avprickning, som i Sverige görs med "pinnar" (se fig 1). De streck man ritar är ursprungligen bilder av just pinnar. I många kulturer finns det spår av att man använt pinnar eller stickor på olika sätt för att hålla ordning i tillvaron genom att räkna och bokföra.

På engelska kallas avprickningsmarkeringar för "tally marks". Ordet "tally" har med vårt "tal" att göra, som i sin tur är förknippat med "skära" och "tälja". Våra förfäder täljde streck i speciella karvstockar när de gjorde affärer och bokförde. Samma källa har engelskans "taylor" (skräddare, dvs en som skär, som i sin tur har att göra med "skräda" och "avskräde", det som man avskär).

I den här artikeln ska vi inte se på det historiska skeendet utan på några andra metoder än traditionell femtalsvis avprickning som i fig 1.

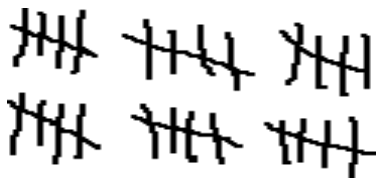


Fig 1

Avprickning används t ex om man ska hålla reda på hur många passagerare som passerat vid incheckningen vid en flygplats, om man ska föra protokoll i brännboll, om man är frisör och ska hålla reda på antalet kunder, om man ska vara rösträknare. Det avprickningssätt som är det i särklass vanligaste i Sverige är femtalsvis avprickning med vart femte snett över de föregående.

Låt oss först konstatera att femtalsvis avprickning har sina poänger. Antalet 5 är tillräckligt litet för att kunna överblickas, varför femgrupperna är lämpliga ur den synpunkten. Vid mycket stora antal så kan det vara lite svårare att räkna ihop femgrupperna. Då kan man ju först ringa in femgrupperna två och två och på så sätt gruppera i tior. Se fig 2.

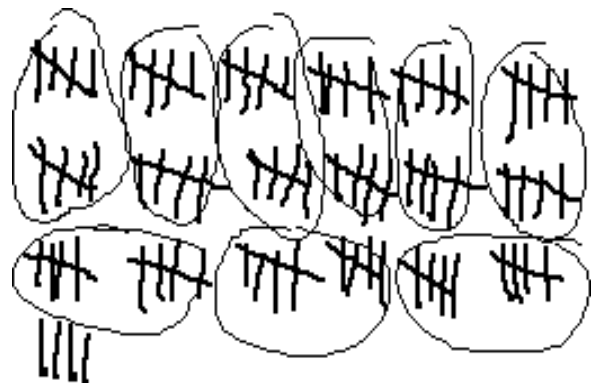


Fig 2

Om man har räknat många objekt med femtalsvis avprickning kan man behöva para ihop femgrupperna för att kunna överblicka och räkna "pinnarna" på ett enkelt sätt. Här har vi 94 stycken. Man skulle kunna dra nytta av att de hela femgrupperna skrivits i ett mönster med 3 rader (horisontella) med 6 femgrupper i varje rad, dvs sammanlagt $3 \cdot 6$ grupper om fem, totalt 90 "pinnar", och 4 enstaka över.

Vissa saker som man lärt sig som barn fortsätter man att göra på samma sätt hela livet, och det är svårt att föreställa sig att man själv skulle kunna göra på något annat sätt. Femtalsvis avprickning tycks vara en

sån sak. För många ter sig ett brännbollsprotokoll med något annat än pinnar ordnade i dessa karakteristiska grupper om fem som en omöjlighet. Finns det egentligen någon anledning att byta till något annat?

Femtalsvis avprickning

I Österrike prickar man också av så att man får grupper om fem. Den figur man åstadkommer är emellertid inte densamma som hos oss. Österrikarna utnyttjar en del av en kvadrat (se Laub, Bernhard & Borovcnik, 1988, s 120). De börjar med att göra fyra prickar i hörnen och drar sen en diagonal från övre vänstra hörnet till nedre högra, se fig 3.

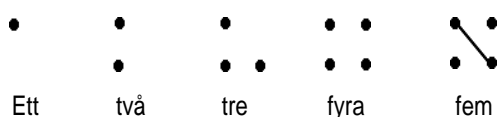


Fig 3

Österrikisk femtalsvis avprickning. Det framgår inte av min källa om de fyra prickarna sätts ut i någon bestämd ordning eller ej. Rent principiellt spelar självfallet ordningen ingen roll, men det skulle ju kunna finnas traditioner här som är överordnade logik och rationellt tänkande.

I stället för att använda hörnen i kvadraten skulle man kunna dra streck för de fyra sidorna innan man tar diagonalen som det femte strecket, se fig 4.

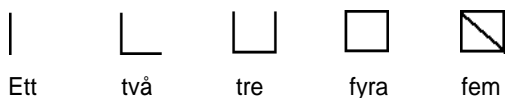


Fig 4

Femtalsvis avprickning som förekommer i Brasilien. Här är jag inte säker på om de fyra kvadratsidorna tas i en bestämd ordning eller ej. Rent principiellt spelar ordningsföljden mellan de fyra första strecken förstås ingen roll, bara man ser till att man alltid har ritat de fyra sidorna innan man tar diagonalen.

Då blir det fem ”pinnar” arrangerade på ett annat sätt än vi gör i Sverige. Ett sånt avprickningssätt har jag sett i ett klassrum i Rio Claro i Brasilien. Dessvärre kan jag inte ge en referens till någon skrift.

Även i Kina förekommer femtalsvis av-

prickning. Där har man valt att sätta ihop fem streck på ett alldeles speciellt sätt så att det blir ett ord, se fig 5.

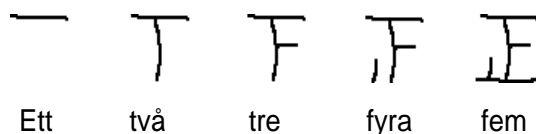


Fig 5

Kinesisk femtalsvis avprickning. Det färdiga tecknet utgör ett ord som uttalas dzenn, med mycket kort, nästan ohörbart e-ljud. Ordet betyder ”upprätt” och förekommer i en stor mängd sammansättningar. Det har ingenting med avprickning att göra i och för sig, det råkar bara ha fem streck och är för den skull praktiskt att använda.

Inte heller här kan jag lämna någon litteraturreferens. Jag har fått veta detta dels vid en konferens 1988 under samtal med Y L Cheung från Hong Kongs universitet och dels under vt 1991 under samtal med Wu Changming, doktorand i bergmaskinteknik vid Högskolan i Luleå.

När jag såg den kinesiska avprickningsfemman för första gången trodde jag att den var identisk med det klassiska kinesiska skrivtecknet för talet 5. För mig tedde sig detta skrivtecken som uppbyggt av 5 streck, men när kineserna skriver det uppfattar de bara fyra moment, se fig 6.

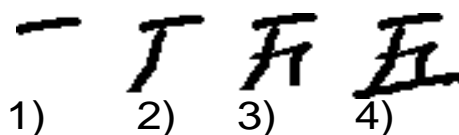
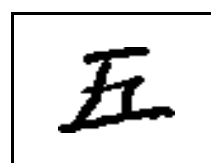


Fig 6

Det traditionella kinesiska skrivtecknet för 5 och den ordning i vilken de olika strecken skrivs. Eftersom det vid skrivandet av detta tecken ingår 4 moment så upplevs det inte som bestående av 5 streck, vilket trots allt är dess ursprung. I det tredje momentet gör man en hake utan att lyfta pennan.

Tecknets ursprung är 5 horisontella streck under varandra, bilder av 5 pinnar. Så småningom blev det ett kryss av de tre mitter-

sta, så att den kinesiska femman såg ut som en romersk tia. Slutligen blev det ett streck och en hake av krysset (se Lindqvist, 1989).

Det gamla skrivtecknet används inte så mycket idag. Normalt skriver man tal med samma hindu-arabiska siffror som vi använder i Europa. Ibland händer det att man tar till de gamla tecknen i mer högtidliga sammanhang. De används också i moderna texter i rubriker som nummer på kapitel eller avsnitt. Jag tycker att det är lite lustigt att man faktiskt har ett traditionellt tecken för 5 som i princip består av 5 streck men använder inte det vid avprickning. Då arrangerar man sina 5 streck på ett annat sätt.

Tiotalstvis avprickning

Om man kombinerar de österrikiska och brasilianska sätten att utnyttja kvadraten för avprickning så hamnar man i tiotalstvis avprickning som lanserades i början av 70-talet av John Tukey (se Tukey, 1977, s 16–17, Johansson, Sandström & Dunkels, 1987, s 23). Här utnyttjar man dels de fyra hörnen, dels de fyra sidorna, dels de två diagonalerna i en kvadrat, sammanlagt alltså 10 objekt. Se fig 7.

Tukey säger uttryckligen i sin bok att man kan sätta ut prickarna i valfri ordning. När alla fyra prickarna är utsatta kan man ta de fyra strecken längs kvadratens sidor i vilken ordning man vill. När såväl hörn som sidor är utritade tar man diagonalerna i valfri ordning. Detta gör att det för vissa antal kan finnas flera olika figurer. Detta kan uppfattas som en nackdel och en svårighet, men min erfarenhet är att man snabbt vänjer sig att känna igen de olika figurerna. Slutresultatet är i alla fall en konfiguration av 10 element och representerar för den skull ett antal av 10 stycken. Att figuren påminner om en romersk tia är ingen nackdel.

Tiotalstvis avprickning passar speciellt bra när man har rutat papper med kvadratiska rutor och använder dessa för varje tiokonfiguration. Själv tycker jag bäst om det centimeterrutade papperet medan många föredrar det vanliga halvcentimeterrutade papperet. Vad man än använder för papper så är tiotalstvis avprickning mycket lätt att läsa av. Dessutom är det mycket lättare att göra rätt jämfört med den variant av femtalsvis avprickning som vi använder i Sverige. Ett vanligt fel är ju att man glöm-

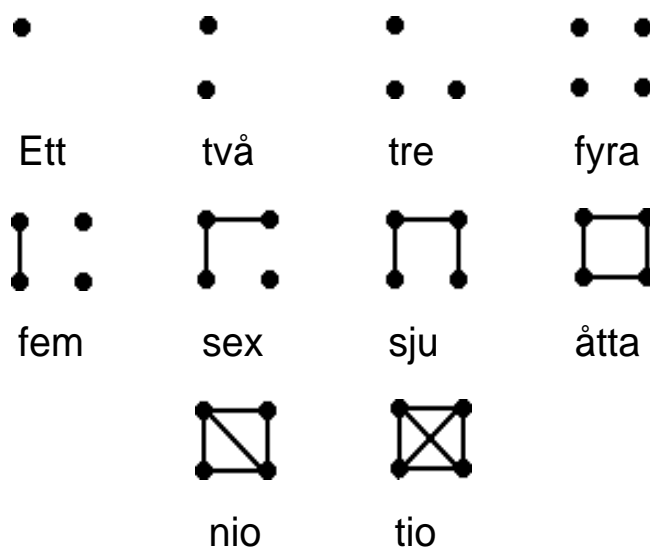


Fig 7

Tiotalstvis avprickning från 70-talet lanserat av amerikanen John Tukey, en av pionjärerna inom den del av statistiken som kallas för EDA, explorativ dataanalys. Prickarna ska sättas ut först, men man kan sätta dem i vilken ordning som helst. Sen kommer de fyra sidorna i kvadraten och sist de två diagonalerna.

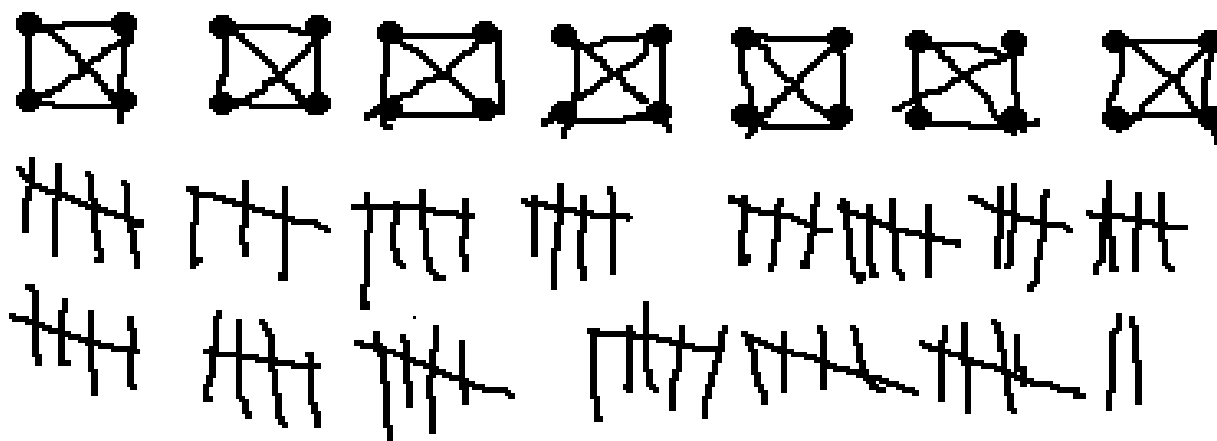


Fig 8

70 objekt räknade dels med tiotalvis avprickning, dels med femtalsvis avprickning. Detta är bara ett konstruerat exempel, som bygger på många års egna och andras erfarenheter. Trots att det i den undre protokollet faktiskt är 70 streck så skulle förmodligen protokollföraren ha dragit slutsatsen att det var 72 objekt.

mer ett streck eller har ritat 5 streck innan man drar det sneda strecket, se fig 8 ovan.

Pythagoras och talet tio

När man nämner tiotalvis avprickning kan man inte låta bli att tänka på Pythagoréerna, dvs Pythagoras, hans akademi från 500-talet fKr och hans efterföljare. De hyllade talen, och ansåg att allt här i världen har sitt eget matematiska tal. För Pythagoréerna var talet 10 det viktigaste talet. Deras skäl var ett helt annat än våra dagars. De hade ju inte alls vårt sätt att skriva talen med ett positionssystem baserat på talet 10. För dem var 10 viktigast därför att det kan

byggas upp som $1 + 2 + 3 + 4$ i ett triangulärt mönster (se fig 9). Det mönstret kallades för tetraktys och blev som ett bomärke för Pythagoras akademi, eller logo som vi skulle säga idag. Talen 1, 2, 3 och 4 ansågs mycket viktiga, inte nog med att de var grundläggande för aritmetiken, de uppfattades också som de fyra grundtalen för hela geometrin. Punkten förknippades med talet 1, den räta linjen med 2, eftersom den bestäms av två punkter, och så fortsatte man på det sättet och förknippade planet med 3 och rummet med 4.

Pythagoréernas tiotalstriangel kanske inte passar så bra vid avprickning, men däremot om man ska räkna många mynt eller poletter av samma valör (se fig 10). Att försöka räkna mynten ett och ett är inte värt att tänka på ens, ty man kommer obönhörligt av sig vid cirka 20. Arbetet förenklas om man arrangerar sina mynt i 10-triangel, vilket kan göras utan att man behöver räkna, med ett ögonkast kan man avgöra när en 10-triangel är klar. Sen är det bara att se hur många hela tior man fick och hur många enstaka det blev över. Ska man räkna flera hundra mynt så kan alla 10-trianglarna läggas så att de i sin tur bildar ett triangulärt mönster med 10 stycken 10-triangelar i varje. Då blir det översködligt och lätt att få fram antalet utan att behöva

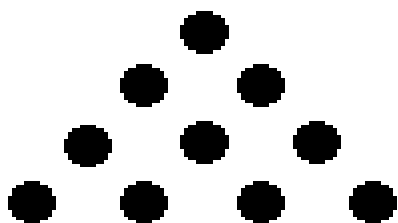


Fig 9

Pythagoréernas favorittal var 10 därför att man kan göra ett triangelmönster av 10 objekt och se 10 som $1 + 2 + 3 + 4$, summan av de fyra första talen. Figuren här till vänster var deras bomärke. Det är fö från Pythagoréerna och deras förkärlek för att göra figurer av tal som vi fått uttryck som "kvadrattal".

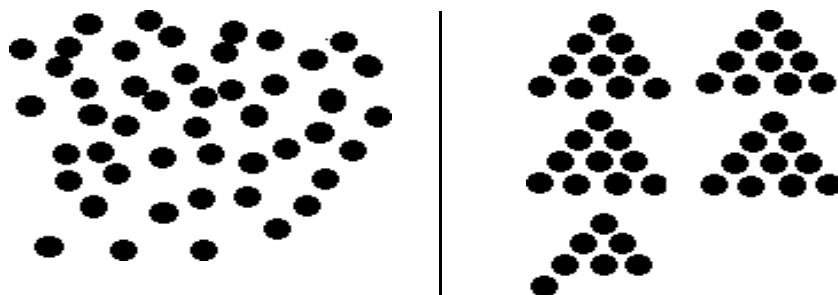


Fig 10

När man ska räkna ett antal enkronor eller poletter så är det svårt att få det rätt om man räknar dem en och en. Man kan då ta Pythagoréernas favoritfigur till hjälp och arrangera sina mynt i triangulära figurer med $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ i varje. Då behöver man inte räkna alls, ty arrangerandet gör man med blicken.

räkna, i meningen räkna upp mynten ett och ett.

Avslutning

Avprickning kan tyckas vara ett snävt ämne för en artikel för lärarfortbildning. Om man emellertid tänker på att avprickning ligger till grund för vårt sätt att räkna och bokföra så inser man att det i själva verket är av stort kulturhistoriskt intresse att sprida kunskap om detta arv, och att mycket av vår kulturs utveckling avspeglas i utvecklingen från enkel avprickning till vårt nuvarande avancerade sätt att skriva och använda tal.

Sifferskrivning har under senare tid utvecklats vidare och vi har fått ett alldeles nytt, och för ändamålet specialkonstruerat sätt, att skriva siffror, nämligen siffror som passar för teckenrutan (sifferfönstret) i en räknedosa och liknande. Man har valt ett sätt som bygger på 7 streck, med vilkas hjälp man kan skriva alla siffrorna 0–9.

Dessa nya siffror ger upphov till nya tankar och idéer. Låt mig få avsluta denna artikel med ett förslag av en elev i åk 6 för hur man skulle kunna utnyttja den nya siffran 5 för att få ett modernt sätt att göra femtalsvis avprickning (se fig 11). Så kulturen går vidare, historien har inte stannat, det är vi och våra elever som har ansvaret för att nya sidor blir skrivna, och det är vi alla som arbetar i skolan som ansvarar för att våra elevers kreativitet uppmuntras och utvecklas. Ett historiskt och internationellt perspektiv kan ofta hjälpa i det arbetet.

Referenser

- Johansson, Ann-Margret, Sandström, Anna-Lisa & Dunkels, Andrejs. *Boken om de fyra räknesätten D*. Göteborg: Förlagshuset Gothia, 1987.
- Laub, Josef, Bernhard Martin & Borovcnik, Manfred. *Lehrbuch der Mathematik für Bildungsanstalten*. 4. Band. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1988.
- Lindqvist, Cecilia. *Tecknens Rike*. En berättelse om kineserna och deras skrivtecken. Stockholm: Bonniers, 1989.
- Tukey, John W. *Exploratory Data Analysis*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1977.

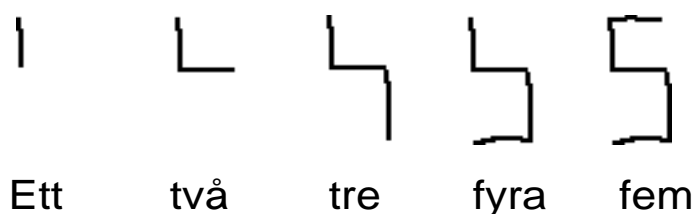


Fig 11

Adam, elev i klass 6 A vid Ormbergsskolan i Luleå vt 91, föreslog detta sätt att göra femtalsvis avprickning baserad på siffran 5 i den moderna utformning som vi ser den på digitalur, telefoner, räknedosor, etc.