Jöran Petersson

Multiplikation i rutnät

I två intilliggande artiklar i detta nummer diskuteras vikten av att elever redan tidigt får möta multiplikation, inte bara som upprepad addition utan även genom areamodellen. Här ges exempel på hur rutnätet kan vara ett didaktiskt verktyg för att utveckla elevers förståelse för multiplikation bortom heltalen i multiplikationstabellen.

Mellan Arkimedes och Fibonacci (Leonardo av Pisa) var det matematiskt sett ganska tyst i Europa. Visserligen bevarade munkar som Boethius antikens matematiska arv och matematikstudier uppmuntrades av exempelvis Karl den store och påven Sylvester II, men det gick trögt ända till den internationella handeln tog fart igen och det åter fanns behov av beräkningar för sjöfart (läs astronomi) och ekonomi. En matematiskt viktig händelse var att Fibonacci importerade de hindu-arabiska siffrorna och positionssystemet till Europa. Med dessa följde också nya beräkningsalgoritmer som används än idag och som kanske borde användas både oftare och i mer varierade sammanhang.

Multiplikation i rutnät

En av dessa algoritmer – *al-darb bi'l jadwal* (multiplikation i rutnät) – dokumenterades 1299 på arabiska och i Italien 1478. Med en variant av denna uppställning får multiplikationen 16 · 24 utseendet som i följande figur:

	20	4
10	200	40
6	120	24

summa 384

Figur 1. Multiplikation av 16 · 24 i rutnät.

Denna typ av algoritm kallas ”grid method” i engelskspråklig litteratur och rekommenderas ofta som ett mellansteg innan standardalgoritmer för multiplikation införs. Antalet kolumner och rader i uppställningen motsvarar antalet positioner som faktorerna har i positionssystemet. Multiplikation i rutnät har stort matematikdidaktiskt värde än idag. Två uppenbart didaktiska fördelar är att rutnätet ger stöd dels för positionssystemet och dels för distributiva lagen och multiplikationens kommutativitet. Algoritmen i figur 1 duger till mycket mer än att multiplicera heltal, och som ett mellansteg, då den har didaktiskt attraktiva egenskaper och även fungerar för att multiplicera bråktal, decimaltal, polynom och att göra detta i andra baser än 10.

Mer matematikhistoria

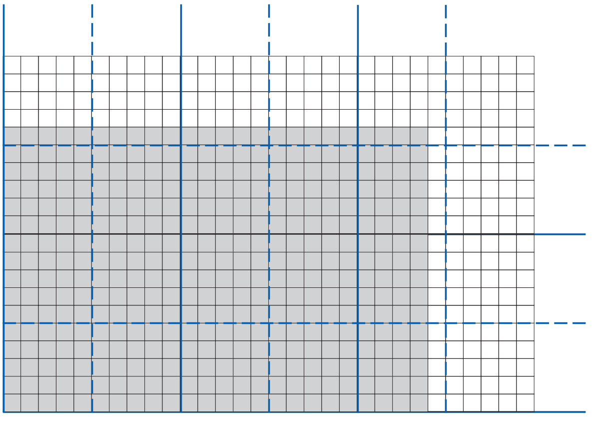
Räknekonstens kulturhistoria: från forntiden till dataåldern av Georges Ifrah

A history of mathematics: an introduction av Victor J Katz

Att vid beräkningar ta stöd av en geometrisk figur har fördelen att det går att åskådliggöra bakomliggande matematiska begrepp, men nackdelen är att den som algoritm sett är långsammare. Å andra sidan är vardagslivets och samhällets behov av att räkna snabbt ganska litet eftersom miniräknare är allmänt tillgängliga i portabel elektronik. Däremot behöver samhället medborgare som kan använda matematik korrekt och argumentera matematiskt korrekt.

Att introducera multiplikation av tvåsiffriga tal

I en studie om att introducera flersiffrig multiplikation använde sig Patrick Barmby, Tony Harries, Steve Higgins och Jennifer Suggate av ett mer finmaskigt rutnät som i figuren nedan. Studiens syfte vara att undersöka under vilka omständigheter ett sådant kan stödja elevernas resonemang om multiplikation. I det finmaskiga rutnätet markerar de streckade linjerna 5×5-rutor och de tjockt markerade linjerna 10×10-rutor. De gråmarkerade rutorna illustrerar multiplikationen $16 \cdot 24$.



Figur 2. Illustration av $16 \cdot 24$.

Rutnätet inbjuder till flera möjliga beräkningsstrategier.

> *Strategi 1* – att identifiera 100-rutor, 10-staplar och enhetsrutor. Det blir två hela och två halva 100-rutor samt sex 10-staplar och slutligen $6 \cdot 4$ enhetsrutor.
>
> *Strategi 2* – att betona positionssystemet och därmed distributiva lagen i beräkningarna. De blir som i figur 1 med $(10 + 6) \cdot (20 + 4)$ men utan att använda parenteser och med distributiva lagen geometriskt tydliggjord. Det blir tydligt att multiplikationen $10 \cdot 20$ har två 100-rutor, fyra 10-staplar, ytterligare $2 \cdot 6$ stycken 10-staplar och dessutom $6 \cdot 4$ enhetsrutor. Distributiva lagens användbarhet blir uppenbar vid multiplikation i ett positionssystem samtidigt som rutnätet illustrerar hur den distributiva lagen fungerar.

Barmby, Harries, Higgins och Suggate beskriver i *The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication* att eleverna utan lärares stöd använder flera strategier (varav några ineffektiva) och att det är viktigt med lärarens undervisning för att hjälpa eleverna att lära sig använda positionssystemet och distributiva lagen för att komma fram till den strategi som motsvarar figur 1 på föregående sida.

Positionssystem med andra baser än 10

Om vi gör det grova rutsystemet som exempelvis 5×5-nät och räknar antalet 25-rutor och 5-staplar, innebär det att vi räknar i basen 5. Exemplet i figur 2 går att klippa itu med sax och möblera om till tre 125-grupper, inga 25-rutor, en 5-stapel och fyra enhetsrutor. I basen 5 blir det därför $(3014)_5$. Multiplikation i andra baser är alltså någorlunda lätt att illustrera i ett rutnät och idén med begreppet positionssystem blir det centrala i framställningen. Gör vi det grovmaskiga rutnätet som 8×8-nät, motsvarar det att multiplicera i basen 8. Rutnätet illustrerar därmed vad det innebär att byta bas. Att använda 5×5-rutorna kan också vara ett stöd när elever lär sig multiplikationstabellen med faktorer större än 5. Exemplet $7 \cdot 6$ motsvarar en 25-ruta + tre 5-staplar + 2 enhetsrutor som tillsamman blir 42.

Närmevärden

Rutnäten stödjer approximativ räkning. Det är lätt att se hur många 100-rutor som $16 \cdot 24$ ungefär fyller: två hela, drygt två halva och ytterligare drygt en halv vilket tillsammans blir mellan 350 och 400 smårutor.

Multiplikation av decimala tal

Rutnäten går att generalisera till decimalmultiplikation. Om vi bestämmer att en stor ruta har kantlängden 1 så motsvarar exemplet i figur 2 multiplikationen $1,6 \cdot 2,4$. Det blir uppenbart att $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$ eftersom det blir 100 smårutor på en enhetsruta. En didaktisk biprodukt av detta är att produkten i en multiplikation inte alltid behöver vara större än en eller ens någon av faktorerna.

Multiplikation av bråk

Betrakta en 10×10-ruta som en hel och mindre rutor som bråkdelar av denna. Exemplet i figur 2 motsvarar nu $(1 + 6/10) \cdot (2 + 4/10)$. Det ligger nära till hands att förkorta och rutnätet ger stöd för att slå ihop två rutor till en för att skriva om multiplikationen till $(1 + 3/5) \cdot (2 + 2/5)$. Förlängning och förkortning blir visuellt tydligt.

En reflektion är att vi ofta beräknar decimalmultiplikationen $1,6 \cdot 2,4$ med en vågrät eller lodrät algoritm medan bråkmultiplikationen $(1+3/5) \cdot (2+2/5)$ beräknar vi genom att skriva om som $(8/5)(12/5)$ och multiplicerar täljare och nämnare var för sig för att därefter förkorta där det går. Alternativt kanske vi använder en vågrät algoritm där den distributiva lagen illustreras med bågar mellan de olika delarna, som här i figur 3.

Figur 3. Vågrät algoritm för multiplikation av bråk.

$$(1 + 3/5)(2 + 2/5)$$

Vi konstaterar att för samma tal representerade i olika form kan vi välja beräkningsalgoritmer som elever upplever mycket olika trots att de bygger på samma matematik. Heinz Steinbring konstaterar i *Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching* att detta utgör en källa till svårighet för elever. Multiplikation i rutnät ger identiska algoritmer oavsett om talen är representerade som bråk eller decimaltal.

Rutnätet erbjuder eleven den hisnande upptäckten av sambandet mellan bråkräkning och att multiplicera i andra baser. Betrakta nu en 25-ruta som enhetsruta i figur 2. Bråkmultiplikationen blir $(3+1/5)\cdot(4+4/5)$ vars produkt med lite omskrivning av heltalsdelen blir $3\cdot5+0\cdot1+1/5+4/25$. I basen 5 blir detta $(30{,}14)_5$ där vi kan kalla kommatecknet för pentaltecken istället för decimaltecken. Jämför med det tidigare räkneexemplet i bas 5 med produkten $(3014)_5$.

Geometrisk algebra

Rutnäten använder samma princip som geometrisk algebra, vilket har sina rötter i gammalbabylonisk matematik 2000–1500 f Kr. Multiplikationen $(x+6)(2x-4)$ illustreras smidigt i rutnät enligt figur 4 där likheten med figur 1 är tydlig.

	$2x$	-4
x	$2x^2$	$-4x$
6	$12x$	-24

summa $2x^2+8x-24$

Figur 4. Multiplikation av $(2x-4)(x+6)$ med samma uppställning som i figur 1.

Algoritmen kan generaliseras till polynom av högre grad liksom till multiplikation av rationella uttryck som $(1+6/x)(2-x/4)$ och om vi sätter $x=10$ blir kopplingen mellan decimaltal och rationella uttryck tydlig. Jeff Suzuki ger i *Modern geometric algebra: A (very incomplete!) survey* flera exempel på hur algebraiska problem med multiplikativ struktur, som andragradsekvationer, att multiplicera och faktorisera uttryck, etc kan lösas med geometrisk algebra. Min egen erfarenhet av att undervisa om polynommultiplikation och att lösa andragradsekvationer med al-Khwarizmis geometriska metod är positiv. Två extrema fall i samma klass var Hans, som hade lyckats betydligt sämre än Greta i gymnasiets första kurs. I avsnittet om polynommultiplikation och andragradsekvationer i gymnasiets andra kurs använde Hans geometrisk algebra och gjorde i stort sett inte ett enda räknefel medan Greta multiplicerade med vågrät algoritm motsvarande figur 3 och löste andragradsekvationer med formel. Greta gjorde i båda dessa problemtyper många räknefel i form av teckenfel och glömda termer, ibland flera i samma övningsproblem. Det blev uppenbart att algoritmer som inte har tydligt åskådligt stöd i begreppets matematiska struktur blir svåra även för duktiga elever och därmed kan de inte hantera dem korrekt. Att Greta framhärdade i att använda algoritmen motsvarande figur 3, motiverade hon med att hon hade använt den i grundskolan. Tidigare undervisning kan alltså vara ett hinder för att byta algoritm.

Sammanfattning

Att ha olika algoritmer (räknestrategier) för att multiplicera flersiffriga (decimal-)tal, bråk och algebraiska uttryck gör matematikstoffet onödigt svåröverskådligt och betonar inte det enhetliga i olika representationer för samma tal eller för den delen att alla dessa exempel har den algebraiska strukturen *ring*, se t ex *Matematiktermer för skolan*. Framställningen ovan betonar att i rutnätet blir den bakomliggande matematiken, i form av distributiva lagen, kommutativitet och positionssystemet, transparent integrerad med beräkningsstrategierna. Det är inte fallet med exempelvis algoritmen i figur 5, där dessa egenskaper visserligen används på exakt samma sätt men är betydligt mindre tillgängliga för direkt åskådning.

$$\begin{array}{r} 2\;4 \\ \cdot\;1\;6 \\ \hline 1\;4\;4 \\ +\;2\;4\; \\ \hline 3\;8\;4 \end{array}$$

Figur 5.
Standardalgoritm för 16 · 24.

Standardalgoritmen i figur 5 använder exakt samma matematik som rutnätsmetoden i figur 1 men med skillnaden att de matematiska egenskaperna distributivitet, kommutativitet och även positionssystem är svåra att urskilja. I den vågräta algoritmen i figur 3 syns visserligen dessa egenskaper, men bland elever är det vanligt att glömma termer och göra teckenfel när de använder den för polynommultiplikation. Steinbring understryker att en framställningsform där de matematiska egenskaperna är svårtillgängliga kan leda till ett procedurinriktat lärande medan en framställningsform som framhäver den matematiska strukturen i högre grad stödjer ett förståelseinriktat lärande. Gretas motstånd mot att använda geometrisk algebra är ett exempel på att det inte är problemfritt för en enskild lärare att introducera en viss framställning om eleverna tidigare är vana vid andra. Det betyder också att en konsekvent och enhetlig framställning av multiplikation kräver långvarigt samarbete från årskurs 1 till gymnasiet. För hugade spekulanter väntar här en longitudinell forskningsuppgift om att i årskurserna F–9 undersöka effekterna på elevernas kunskaper i multiplikativa strukturer av att konsekvent införa multiplikation i rutnät.

LITTERATUR

Bolden, D.S., Barmby, P. & Harries, T. (2013). A representational approach to developing primary ITT students' confidence in their mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44:1.

Furness, A. (2001). *Matematiken tar form*. Solna: Ekelund.

Fuson, K. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics* 9(6).