Lea-Marie Sittler

Innan polletten trillar ner

I sitt examensarbete undersökte författaren elevers förståelse av begreppen funktion och derivata. Hon sammanfattar här de båda teorier som hennes forskning utgick ifrån och ger några inblickar i forskningsresultatet.

Jag har alltid tyckt att det är kul att förklara saker. Att förenkla och begripliggöra något krångligt för någon annan – eller för mig själv för den delen. Under mina universitetsstudier till matematik- och filosofilärare fortsatte jag intressera mig för och förvånas över hur förståelse går till, hur det ibland tar tid och ibland verkar hända på en sekund, hur jag ibland får jobba hårt för att begripa något och ibland bara får det serverat. Till min stora glädje presenterades jag under filosofistudierna för Gadamers hermeneutik – läran om förståelse – som satte upplysande ord på många av mina funderingar. När jag sedan skulle välja ämne och frågeställningar för mitt examensarbete landade jag snabbt i att jag ville undersöka matematisk förståelse och begreppsbildning.

När förstår vi?

Arbetet med min uppsats genomsyrades av följande frågor: När är det egentligen som vi förstår något? När kan vi börja säga att vi har fått grepp om någonting? Är det när vi kan hänga med i någons resonemang? Är det när vi kan föra resonemanget själva? Är det när vi kan använda oss av ett begrepp för att lösa något större problem? Eller är det först när förståelsen sipprar in i vårt undermedvetna och innehållet finns där som en intuition, en automatism som aktiveras när den behövs?

Frågorna är djupt filosofiska och grundar sig i epistemologiska frågor som: *Vad är kunskap? Kan kunskap likställas med förståelse av något? Går det att förstå något helt och fullt?* Om svaret på frågan *Kan kunskap likställas med förståelse?* skulle vara *Ja!*, blir frågan om förståelsens natur allt mer angelägen. Inte minst för oss lärare. En stor del av vårt samhällsuppdrag består i att förmedla kunskap till elever. Vad är då kunskap inom matematik? Är det att kunna utföra procedurer? Eller att kunna definitioner? Att se sambandet mellan olika begrepp? När en elev löser en uppgift rätt, har hon då begripit det matematiska innehållet uppgiften behandlar? Eller går hon bara efter ett recept, steg för steg, och löser uppgiften på det viset? Andra frågor apropå förståelse: Vad händer under all tid innan ”polletten trillar ner”? Irrar den oförstående omkring i halvmörker tills lampan plötsligt tänds eller blir det sakta men säkert allt ljusare fram tills den efterlängtade, förståelsebringande helhetsbilden framträder?

Jag är förvisso inte den första som funderar kring kunskap och begreppsförståelse. Innehållet i exempelvis Linda Marie Ahl och Ola Helenius artikel *Vad är egentligen ett matematiskt begrepp?* i Nämnaren 2018:2 berör liknande idéer och tankar och jag rekommenderar den artikeln varmt.

Min examensuppsats som ligger till grund för denna artikel är baserad på två teorier som på olika sätt ger svar på några av frågorna jag ställde i början. Den ena teorin är av Anna Sfard och den undersöker och illustrerar skillnaden mellan *operationell* och *strukturell* förståelse. Den andra, utvecklad av Shlomo Vinner och David Tall, ger en nyanserad beskrivning av hur matematisk begreppsbildning går till. Förutom att redogöra för teorierna genomförde och analyserade jag individuella intervjuer med tre gymnasieelever som då gick i årskurs tre. Under intervjuerna pratade jag med eleverna om matematik i allmänhet och mer specifikt om funktioner och förstaderivata. Eleverna fick arbeta med och försöka lösa olika uppgifter som hade med funktioner och funktionernas derivata att göra. I uppgifterna ingick såväl algebra som analys, eleverna gjorde alltså både algebraiska uträkningar, ritade grafer och fick reflektera kring grafer som jag visade med hjälp av Geogebra. Jag kommer nu att ge er inblick i teorierna samt några av mina forskningsresultat.

Anna Sfards teori

Anna Sfards avhandling *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin* (Matematisk begreppsbildning: reflektioner om process och objekt som två sidor av samma mynt) handlar om å ena sidan två olika sätt att förhålla sig till matematiska begrepp och matematik som helhet och å andra sidan utvecklandet av matematisk förståelse.

Sfard beskriver matematiken som tvåsidig, vilket hon absolut inte är den första att göra. Före henne har det funnits en hel rad matematiker, filosofer och didaktiker som har beskrivit matematiken och matematiskt tänkande som exempelvis abstrakt versus procedurbetonat, figurativt versus operativt och instrumentellt versus rationellt. Sfard väljer att beskriva matematiskt tänkande och matematisk förståelse som både operationellt och strukturellt, alltså både något som *görs* (som en operation) och något som *är* (som en struktur). Sfard är tydlig med att de två synsätten, det operationella och det strukturella, är ”två sidor av samma mynt” och att de både betingar, förutsätter och kompletterar varandra.

Men vad innebär det att tänka strukturellt eller operationellt, eller både och, i mötet med matematiska begrepp? Låt mig börja med det strukturella synsättet. Det innebär i princip att kunna referera till det abstrakta matematiska begreppet som om det vore ett verkligt ting. Ett ting är något som bland annat kan tittas på från olika håll, som har egenskaper och som kan manipuleras. Ett strukturellt förhållningssätt innebär också att se begreppet i sin helhet och i relation till andra begrepp. Ett strukturellt sätt att se på exempelvis 1/2 skulle kunna vara att tänka på det som ett rationellt tal, att tänka att det är lika med 2/4 och 50/100 och 0,5 och att det går att utföra olika operationer med talet. Ett operationellt synsätt på 1/2 däremot skulle innebära att tänka på operationen *ett delat med två*. Tänker man operationellt ses begrepp som processer, vilket bland annat innebär att se dem som verktyg.

Ett av begreppen som jag undersökte är funktionen. Strukturellt sett är en funktion ett samband mellan två variabler, eller som en av eleverna jag intervjuade beskrev: ”Alltså, en funktion beskriver en händelse eller ett förlopp av tid skulle jag säga”. Att däremot se en funktion på ett operationellt sätt skulle vara att se det som ett verktyg som möjliggör till exempel lösningen av extremvärdesproblem eller att läsa av y-värden för olika x-värden. Några av er tänker kanske redan att matematiska begrepp kan och faktiskt *bör* ses både strukturellt och operationellt, precis som en hammare uppenbarligen är en hammare som har en viss vikt, storlek och färg men som även kan användas för att spika. I följande tabell finns fler exempel på begrepp och hur de kan ses strukturellt respektive operationellt.

	strukturellt	operationellt
Funktion	Ordnade par	En metod för att ta sig från det ena systemet till det andra
Symmetri	Egenskap hos en geometrisk figur	Att transformera en geometrisk form, att spegla
Naturliga tal	Egenskap hos en talmängd	0 eller något annat tal som beräknas genom att addera 1 till ett annat naturligt tal
Rationella tal	Ett par av heltal	Ett tal som fås genom att dividera två heltal
Cirkel	Alla punkter med samma avstånd till en given punkt	En linje som fås genom att rotera en passare runt en given punkt

Vi ser att det strukturella sättet att se på begrepp innehåller substantiv som *par, egenskap* och *alla punkter.* Beskrivningar av det operationella synsättet däremot innehåller verb som *transformera, beräkna, fås* samt *att ta sig (från det ena till det andra).*

Med det sagt ska vi nu kika på den andra delen av Sfards avhandling, nämligen en trestegsmodell som beskriver de olika stegen i en elevs förståelseprocess då den lär sig ett nytt matematiskt begrepp. Viktigt här är att komma ihåg att matematiska begrepp hänger samman och bygger på varandra och i de allra flesta fallen är det så att en elev behöver ha viss kunskap om en rad begrepp för att kunna lära sig ett nytt. Ett exempel är begreppet *derivata*. För att förstå vad en derivata är behöver eleven ha kunskap om bland annat begreppen funktion, lutning, maximipunkt, x-värde och y-värde. Derivata skulle jag kalla för *ett högre begrepp* eller *ett begrepp på nästa abstraktionsnivå* i relation till de andra nyss nämnda begreppen. Modellen beskriver alltså hur en individ går igenom olika stadier då hon håller på att förstå och ta till sig ett nytt matematiskt begrepp. Sfard kallar de tre stadierna

1. internalisering
2. kondensering
3. reifikation.

1. Internalisering

Då ett nytt begrepp introduceras, lär eleven vanligtvis känna olika procedurer som kan utföras med hjälp av det nya begreppet. Efter ett tag blir eleven skicklig i att utföra dessa procedurer, hon börjar nu att *internalisera* dem. Det karakteristiska för det här steget är att begreppet och de med begreppet associerade procedurerna inte längre blir utfört steg för steg för att kunna användas. Då eleven till exempel möter funktionsbegreppet för första gången är det vanligt att hon stöter på övningsuppgifter där hon ska räkna ut olika y-värden med hjälp av givna x-värden och vice versa. I denna fas är det även vanligt att rita grafer med hjälp av värdetabeller. Förståelsen av till exempel funktioner präglas i internaliseringsfasen alltså bland annat av att eleven kan utföra algebraiska procedurer då olika x- och y-värden beräknas samt av korrekt användning av värdetabeller som hjälpmedel för att kunna rita grafer. Grafer används i denna fas som verktyg för att läsa av olika y- eller x-värden eller för att få en bild av ett visst händelseförlopp. Ett operationellt synsätt är oftast dominerande i denna fas.

2. Kondensering

Med *kondensering* menar Sfard den fas då eleven lyckas ”pressa samman” längre procedursekvenser till mer hanterbara enheter. I detta stadium börjar eleven kunna tänka på procedurer som helheter, utan att behöva utföra dem; procedurerna blir allt mer intuitiva. Det är i denna fas som det nya begreppet börjar ta en tydligare form i elevens huvud. Då funktionsbegreppet utvecklas hos eleven kännetecknas kondenseringsfasen av att eleven till exempel kan titta på en funktion och tänka sig hur grafen ungefär kommer att se ut. När till exempel funktionen $f(x) = x^2$ är given kan eleven i kondenseringsfasen snabbt se att funktionsvärdet är samma då $x = 2$ och då $x = -2$ och kommer till exempel inte behöva göra en utförlig värdetabell för att kunna rita funktionsgrafen. Det blir även möjligt för eleven att tänka igenom lösningen av ett matematiskt problem. I arbetet med ett extremvärdesproblem kan eleven till exempel tänka att hon först ska derivera funktionen för att sedan sätta $f'(x) = 0$, vilket ger henne ett eller flera x-värden som hon sedan sätter in i ursprungsfunktionen för att få fram extrempunktens eller extrempunkternas y-värde(n). Eleven kan i denna fas, som beskrivet ovan, tänka på procedurer som helheter. Hon behöver inte längre utföra dem för att de ska framstå som meningsfulla.

3. Reifikation

En elev kan sägas ha *reifierat* ett begrepp först när hon kan uppfatta begreppet som ett rumsligt objekt med olika egenskaper som kan manipuleras och betraktas från olika håll. Vi kan säga att det i detta steg sker ett *ontologiskt skifte* – den plötsliga förmågan att se något bekant i ett helt nytt ljus. Medan första och andra steget, internalisering och kondensering, sker gradvist, kan detta tredje steg sägas likna ett *instantaneous quantum leap*, ett ögonblickligt kvantsprång. Likt vatten som börjar koka; uppvärmningen sker gradvis, men övergången mellan flytande till gasformigt sker plötsligt vid exakt +100 °C. I utvecklingen av funktionsbegreppet kan eleven som har kommit till reifikationsstadiet föreställa sig funktioner – både framställt som uttryck och som grafer, värdetabeller och teckentabeller – som manipulerbara objekt med olika egenskaper. För att återkomma till exemplet $f(x)=x^2$ så begriper eleven som har reifierat begreppet $f(x)=x^2$ att funktionen är symmetrisk, att den är deriverbar, att $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ och att det går att göra operationer som $(f(x))^2$ eller $f(x)/g(x)$. Eleven är nu redo att övergå till nästa abstraktionsnivå, att lära sig procedurer som förutsätter att de nu reifierade funktionerna med alla sina egenskaper kan hanteras som självständiga objekt. Ett exempel på en sådan procedur är beräkning av integraler. Man kan tänka sig att reifikationen av ett begrepp sker just då ett begrepp på nästa abstraktionsnivå börjar internaliseras.

Allt detta – att se det operationella och det strukturella i ett begrepp, att utföra procedurer med hjälp av det, att framställa det på olika sätt – ingår i *den mentala begreppsbilden*, som är en del av den andra teori som mitt examensarbete bygger på.

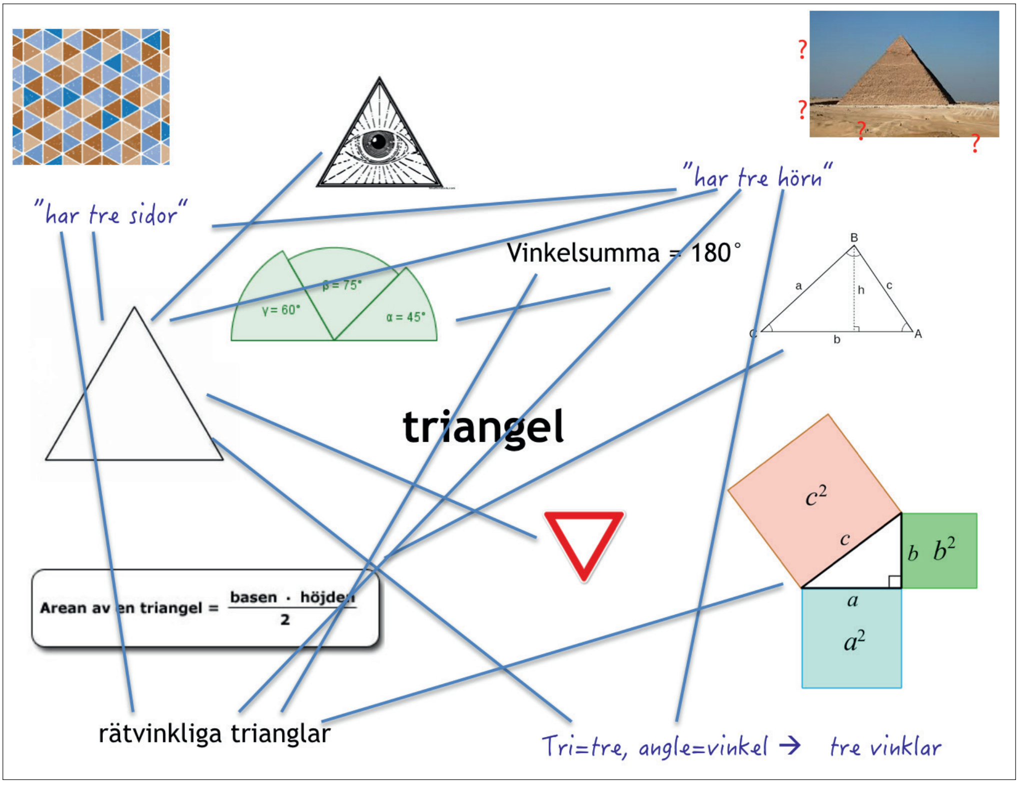
Tall och Vinners teori

Återigen en avhandling med lång titel: *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity* (Begreppsbild och begreppsdefinition i matematik exemplifierat med hjälp av gränsvärde och kontinuitet). Jag fokuserar på den del av avhandlingen som behandlar den kognitiva strukturen som hos en individ associeras med ett givet begrepp och som jag kallar den mentala begreppsbilden.

En kognitiv struktur kan man föreställa sig som en samling tankar och föreställningar relaterade till ett begrepp – bilder, meningar, ord, procedurer, egenskaper, etc – som är kopplade till varandra och tillsammans bildar ett mönster. När det gäller matematiska begrepp så ingår det hos de flesta individer även någon form av begreppsdefinition i begreppsbilden. Det är möjligt att en sådan mental begreppsbild inte är helt koherent och att den innehåller attribut som motsäger varandra. Jag återkommer till detta.

Det är inte enbart under matematiklektionerna och andra formella sammanhang som mentala bilder av matematiska begrepp byggs upp och utvecklas, utan det sker även i olika informella situationer utanför skolan. Figuren på nästa sida illustrerar hur vi kan föreställa oss en individs mentala bild av begreppet *triangel*.

Som nämnts ovan kan eventuella felaktiga uppfattningar om ett begrepp vara en del av en elevs mentala bild av ett begrepp, som till exempel pyramiden i figuren. En pyramid ser ut som en triangel när man tittar på den från ett håll, men i själva verket är det bara sidorna som är triangulära. En sådan inkoherens i begreppsbilden kallar Tall och Vinner för *potentiell kognitiv konflikt*, som är potentiell så länge individen inte är medveten om att föreställningen är felaktig. Just då individen inser att en pyramid inte är triangulär hamnar hon i en faktisk kognitiv konflikt, som i detta fall är enkel att lösa – läraren, Google eller någon annan kompetens i elevens närhet berättar om pyramiders tredimensionalitet. I bästa fall leder allt detta till att eleven strukturerar om och nyanserar sin mentala bild av begreppet triangel och ersätter pyramiden med pyramidens sidor. Vi kan säga att eleven har reifierat begreppet triangel och befinner sig när det gäller pyramidbegreppet i internaliseringsfasen.



Felaktiga uppfattningar om ett begrepp kan alltså innehålla frön till kognitiva konflikter hos individen. Som vi ser i triangel–pyramid-exemplet är sådana kognitiva konflikter inte nödvändigtvis ett hinder i lärandet utan är oftast – om de hanteras väl – en port till fördjupad och mer nyanserad kunskap.

Exempel ur intervjuerna

I analysen av de intervjuer som jag genomförde i min studie försökte jag applicera dessa teorier på det eleverna sa, ritade och skrev. Det visade sig att teorierna i allra högsta grad är användbara när det gäller att få en bild av var någonstans en elev befinner sig i sin förståelseprocess. Låt mig ge några exempel ur intervjuerna.

Exempel 1, Lena

Lena läser igenom ett problem som ska lösas. På pappret visas ett rätblock och det står:

> Figuren visar ett rätblock med sidorna $x/4$, $(8–x)$ och $(8–x)$ längdenheter. För vilket x får rätblocket största möjliga volym?
>
> Beräkna med hjälp av derivata rätblockets största möjliga volym. *Du får använda Geogebra som hjälpmedel.*

Hennes första reaktion är: *De skriver 'Du får använda Geogebra som hjälpmedel'. Men jag tänker först på att lösa det algebraiskt, eftersom man kanske inte behöver göra linjer liksom … För att jag tänker att det här ju är en box och ingen kurva …*

I det här exemplet, precis som i resten av intervjun, är det tydligt att Lena känner sig hemma i att lösa problem algebraiskt. Det är även tydligt att hon inte känner sig hemma i översättningen mellan uttryck och graf. Citatet ovan får mig även att anta att en graf för henne snarare är en illustration istället för ett samband mellan två variabler. Hur Lena pratar om matematik och hennes sätt att ta sig an uppgiften är helt enkelt lösnings- och procedurinriktat och hon verkar sakna ett intresse för de olika matematiska objektens egenskaper och sammanhangen dem emellan, för det strukturella helt enkelt. Hon applicerar ett i huvudsak operationellt synsätt och befinner sig i kondenseringsfasen i lärandet av funktionsbegreppet. När det kommer till derivatan är hon fortfarande i internaliseringsfasen. Hon kan ännu inte tänka på längre procedursekvenser utan arbetar fortfarande i mindre steg.

Exempel 2, Frodo

Då Frodo konfronteras med rätblocksuppgiften reagerar hon så här: *Egentligen borde jag gjort en sån fin uträkning där jag multiplicerar sidorna med varandra. Men när jag bara tittar på det så tänker jag att volymen nog blir störst då $x = 4$. Volymen blir 16 då.*

Istället för att jobba procedurellt genom att skriva ner och förenkla uttrycket för rätblockets volym för att sedan derivera och räkna ut maximi- och minimivärden, funderar Frodo först på vad som är rimligt. Hon föreställer sig rätblockets sidor, hur de blir kortare och längre beroende på x-värde. Hon fortsätter i sitt resonemang: *Om man tar nåt större tal på $x/4$ då blir det mycket mindre här* [pekar på $8 - x$] *men om man tar ett lägre tal bara för att man ska få högre här* [pekar på $8 - x$] *så blir det noll komma nånting här* [pekar på $x/4$] *vilket gör att om man multiplicerar dem blir det mindre. Så om man till exempel skulle ta $x = 3$* [Räknar ut $(8–3) \cdot (8–3) \cdot 3/4 = 18{,}75$, vilket är större än 16] … *Ah … så jag tänkte fel.*

Hon använder sig av 'trial and error' för att snabbt kolla om hennes intuitiva svar skulle kunna stämma. När hon inser att svaret $x = 4$ inte stämmer skriver hon ner uttrycket och förenklar det med hjälp av en ”sån fin uträkning”, som hon gör utan problem. Med hjälp av Geogebra får vi till slut fram uttryckets graf. Frodo läser av att största volym fås då $x = 2{,}67$ och berättar att det hade varit möjligt att lösa uppgiften algebraiskt, men att denna procedurkunskap sitter för långt inne. Frodo har reifierat funktionsbegreppet, hon hanterar det som något mer än en procedur eller ett verktyg. Det faktum att hon använder sig av 'trial and error' visar på att kondenseringen av begreppet redan har skett, procedurerna är intuitiva och ses som meningsfulla även när de inte utförs hela vägen. Jämfört med Lena har Frodo lätt att begripa översättningen mellan graf och uttryck. Hon verkar se rätblocket, uttrycken och grafen som med varandra relaterade objekt med olika egenskaper – ett strukturellt förhållningssätt.

Didaktiska konsekvenser

Arbetet med studien av elevers begreppsbild av funktioner och derivata samt undersökandet av deras tillvägagångssätt i mötet med begreppen, har gjort att nya frågor har formulerats i mitt huvud, frågor som spelar stor roll i mitt framtida läraryrke – både när det gäller min undervisning av funktioner och derivata, och när det gäller min matematikundervisning i stort. En fråga som kom upp tidigt under arbetet med uppsatsen var hur min egen mentala begreppsbild av funktioner och derivata egentligen ser ut och det slog mig hur viktigt det är att som matematiklärare bli medveten om sin egen begreppsbildning. Att lära ut matematik till en helklass innebär att behöva förhålla sig till ett trettiotal olika sätt att se på, ta sig an och hantera såväl nya som välbekanta begrepp. Det är viktigt att för det första bli medveten om vilket synsätt som dominerar hos en själv och för det andra skaffa sig verktyg och kunskap om hur man kan upptäcka, utveckla och utmana andras. Ju fler sätt att se på olika begrepp som jag som matematiklärare kan identifiera och relatera till, desto lättare blir de att känna igen hos de olika elever jag möter. Eller för att säga det hela med Tall och Vinners ord: *En lärare som är medveten om olika mentala begreppsbilder har möjligheten att upptäcka eventuella inkorrekta sådana och, genom att diskutera dem, rationalisera problemet.*

Ytterligare något som tangeras av de båda presenterade teorierna är de sju förmågorna som sedan införandet av Lgy 11 genomsyrar kursplanen i matematik och därmed undervisningen. Har införandet av dessa förmågor bidragit till en mer nyanserad matematikundervisning som tar hänsyn till utvecklandet av både operationella och strukturella angreppssätt? Att ge ett utförligt svar på denna fråga är något jag överlämnar till framtida forskningsarbeten. Det jag kunde göra i min uppsats var att svara utifrån mina egna erfarenheter i undervisningssammanhang och utifrån det jag under min utbildning lärt mig. Det jag upplever ute i skolorna är att matematikundervisningens upplägg är starkt präglad av matteboken, samtidigt som elevernas drivkraft i ämnet i många fall utgörs av att räkna igenom uppgifterna som läraren skrivit upp i terminsplaneringen. Jag ser även att det är vanligt att stort fokus hamnar på räkning, och därmed procedurförmågan. Genom införandet av förmågorna och det faktum att förmågorna är tätt kopplade till betygssättningen, tvingas matematiklärare även fokusera på andra aspekter inom matematiken. I beskrivningen av problemlösningsförmågan står bland annat att elever ska lära sig ”värdera valda strategier och metoder”, vilket kräver och bidrar till ett strukturellt tänkande samt en koherent begreppsbild. En annan förmåga som stödjer utvecklandet av det strukturella synsättet hos eleverna samt bidrar till koherensen i elevers mentala begreppsbild är begreppsförmågan.

Formuleringen att ”använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen” betonar något som jag tog upp i min uppsats, nämligen att det är just förmågan att kunna se hur olika begrepp och begreppsegenskaper hänger samman som är förutsättning för en koherent begreppsbild.

Modellerna som ett verktyg

Sammanfattningsvis kan jag säga att mina studier av de olika teorierna och analysen av min studies empiriska material har gett mig två saker. För det första har jag skaffat mig verktyg som jag kan använda mig av då jag skapar mig en bild av elevers kunskapsutveckling. Jag kan med hjälp av de presenterade modellerna rikta min uppmärksamhet mot aspekter av elevernas lärande, förståelse och begreppsbildning som jag tror kommer bidra till att jag på ett nyanserat sätt kommer att kunna anpassa min undervisning och mitt sätt att förklara de olika innehållen i min undervisning. Genom att ha gjort en djupanalys av intervjuerna med de tre eleverna har jag blivit varse att det ofta är små nyanser i elevernas sätt att uttrycka sin förståelse och sina förhållningssätt till matematiska begrepp som avslöjar hur deras begreppsbilder ser ut samt vilket synsätt som dominerar.

För det andra, när jag nu efter att ha skrivit min uppsats läser matematikämnets syfte, slås jag av att operationell–strukturell-dualismen formuleras på flera ställen:

- Matematik är [...] ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.
- Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan.
- [Att] ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel.

Med Sfards samt Tall och Vinners teorier i bakhuvudet kan ämnesplanen i matematik läsas, tolkas och arbetas med på ett meningsfullt, nyanserat och givande sätt.

Uppsatsen, *Innan poletten trillar ner – En studie om matematisk begreppsbildning*, finns i fulltext på gupea.ub.gu.se/handle/2077/58074