Per Nilsson

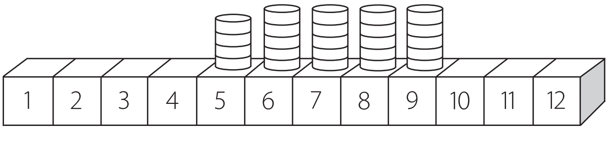
Summaspelet

– ett spel för lärande i sannolikhet

Summaspelet är ett tärningsspel som innehåller element av slumpkaraktär. Författaren har utvecklat och använt olika varianter av spelet för att studera hur elever resonerar om och tänker kring olika aspekter av sannolikhet i sammansatta slumpförsök. Vi får en presentation av spelet och diskussion om varianter av spelet.

Idén till summaspelet kommer från *Mathematics task centre project* i Australien. Spelet är baserat på summan av två tärningar och syftar till att erbjuda elever möjlighet att resonera om sannolikhet när de försöker hantera sammansatta slumpförsök.

Spelet består av ett spelbord, två tärningar och en uppsättning marker. I pilotstudien var spelbordet numrerat från 0 till 12. I efterföljande versioner har nollan tagits bort och numreringen har varit mellan 1 och 12, se figuren nedan. Att inte kunna få noll visade sig vara uppenbart för eleverna. Eleverna spelade med två vanliga tärningar – numrerade från 1 till 6 – och 14 marker.



I pilotstudien deltog åtta elever ur en sjundeklass. Eleverna delades in i fyra tvåmannalag. Lagen var placerade i var sitt hörn av klassrummet vid så kallade lagbord. Vid lagborden diskuterade lagen fram strategier för hur de skulle öka sina chanser att vinna spelet. När lagen ansåg sig klara spelade två lag mot varandra vid ett spelbord, placerat mitt i klassrummet. Spelet upprepades tre gånger så att alla lag fick möta varandra en gång.

Två lag spelade mot varandra. Varje lag ombads fördela sina 14 marker bland de tolv talen på spelbordet som motsvarade summan av de två tärningarna. Om ett av lagen eller båda hade marker på den summa som tärningarna visade fick laget ta bort exakt en av markerna på den summan, oavsett vilket lag som slog. Det lag som först blev av med sina marker vann.

Bakomliggande idéer och uppslag för förändringar

Det övergripande syftet med pilotstudien var att ge uppslag och förslag för fortsatta vägval i mitt avhandlingsarbete. De centrala idéerna av den här versionen av spelet har emellertid varit desamma som de efterföljande versionerna jag använt i mina studier (Nilsson, 2006).

I pilotstudien användes två vanliga tärningar. Ett spel där kast med tärningar är en central ingrediens antog jag kunde skapa diskussioner om slump och därigenom uppmuntra resonemang om sannolikhet. Jag antog att det skulle bli aktuellt med reflektion över möjlig och omöjlig händelse och över utfallsrummets sammansättning vad gäller antalet gynnsamma fall för ett utfall. Att upprepa spelet tre gånger syftade till att ge eleverna möjlighet att reflektera över frekvensinformation.

Jag gjorde några speciella upptäckter i pilotstudien som vägledde mig i omformningen av spelet för nästkommande studie. För det första, de vanliga tärningarnas utseende stimulerade eleverna att anta ett förhållningssätt till spelet som påminner mycket om hur vi agerar i vanliga sällskapsspelssituationer. En del av studiens syfte var att undersöka vardagsförankrade intuitioner och vilken roll dessa har för elevers sätt att utveckla matematiska resonemang. Likväl, i sällskapsspel förväntas det knappast att man ska utföra detaljerade analyser av sannolikheter, och då spelet aldrig utmanade eleverna att omvärdera sin vardagligt förankrade ansats så uppstod det få tillfällen för eleverna att reflektera över sannolikhetsaspekter . Detta var anledningen till att göra spelet mer ”obekant” för eleverna genom att använda tärningar som på ett tydligt sätt avviker från vanliga tärningar.

Baserat på pilotstudiens resultat och på teorier om variationens betydelse för lärande (Marton m fl, 2004), beslutade jag att eleverna i den nästföljande studien skulle möta ett annorlunda par tärningar i varje ny spelomgång, med speciella likheter och skillnader mellan omgångarna. Dessutom är sannolikheten mellan två intilliggande summor med två vanliga tärningar väldigt lika. Till exempel är sannolikheten för summan sex 5/36, medan sannolikheten för summan sju är 6/36, vilket leder till en skillnad i sannolikhet på endast 1/36. Det finns därför stor risk att en kastserie med två vanliga tärningar inte uppvisar tillräcklig skillnad mellan frekvenser, en skillnad som skulle kunna uppmuntra elever att utveckla sina tankar om spelet.

Tärningar med annorlunda numrering

Jag utvecklade ett system med fyra olika uppsättningar tärningar för den nya spelaktiviteten. Formen på tärningarna var som vanliga tärningar, men de hade numrerats på speciella sätt enligt:

Omgång 1 (gula tärningar)

Tärningarna var numrerade med ettor och tvåor, fördelade som (111 222) och (111 222). Symmetrin ger att de 36 möjliga utfallen (ordnade par) reduceras till fyra lika sannolika utfall (1,1), (1,2), (2,1) and (2,2). Baserat på utfallsrummets sammansättning blir sannolikheten för de tre möjliga summorna $P(2) = P(4) = 1/4$ och $P(3) = 1/2$.

Omgång 2 (röda tärningar)

Här fanns två olika tärningar, numrerade (222 444) och (333 555). Syftet med designen vara att låta eleverna möta en sammansatt händelse där ett utfall, i detta fall summan 7, kunde infinna sig på två helt olika sätt ($2+5$ och $3+4$). Tärningarna ger fyra lika sannolika utfall: (2,3), (2,5), (3,4) och (4,5). Summornas sannolikheter blir $P(5)=P(9)=1/4$ och $P(7)=1/2$.

Omgång 3 (blå tärningar)

De möjliga summorna är här samma som för det gula paret tärningar. Här är dock sidorna markerade (1111 22) och (1111 22). Syftet var att utmana elevernas uppfattningar om utfallsrum och sättet på vilket detta påverkar resultaten av ett slumpförsök. Denna design ger $P(2)=4/6\cdot 4/6=16/36=4/9$, $P(3)=2(4/6\cdot 2/6)=16/36=4/9$, $P(4)=2/6\cdot 2/6=4/36=1/9$.

Omgång 4 (vita tärningar)

Dessa tärningar var en blandning av de röda och de blå tärningarna. Tärningarnas sidor visade (2222 44) och (3333 55), som leder till sannolikheterna $P(5)=P(7)=4/9$ och $P(9)=1/9$.

Varje uppsättning har tre möjliga summor. I de två första omgångarna spelade eleverna med 24 marker och i de två sista spelade de med 36 marker. Valet av antalet marker grundande sig på att eleverna exakt skulle kunna fördela markerna enligt proportionerna av antalet gynnsamma fall för respektive summa. Antalet marker skulle emellertid också göra det möjligt för eleverna att uttrycka eventuella likformiga ansatser; 24 (36) marker på tre utfall kan fördelas jämnt med 8 (12) marker på varje utfall. Att människor tenderar att hantera även icke likformiga slumphändelser som likformiga benämns i litteraturen som "equiprobabilistic bias" (Lecoutre, 1992).

Det var också viktigt att antalet marker var tillräckligt stort så att spelet skulle kunna erbjuda eleverna avgörande information om frekvenserna. Med stöd i pilotstudiens resultat antog jag att om eleverna skulle bli utmanade av ett spels frekvenser var det tvunget att summornas frekvenser visade på en tydlig skillnad. Att skillnaden mellan sannolikheterna för närliggande summor skilde sig åt med så mycket som 1/4 (omgång 1 och 2) eller 1/3 (omgång 3 och 4) skulle förstärka möjligheten att spelet visade tydliga skillnader mellan summornas frekvenser.

Att ta fram möjliga summor via extremvärden

Under aktiviteten formulerade de flesta av eleverna två huvudsakliga problem. Inledningsvis lade eleverna stor vikt vid att identifiera vilka summor som är möjliga. Liten vikt lades vid att diskutera huruvida summorna har olika chans och om det därför vore lämpligt att placera några fler marker på någon summa. Under aktivitetens gång blev däremot frågan om skillnad i sannolikhet mer och mer central i elevernas diskussioner.

När eleverna skulle urskilja möjliga summor utvecklade flera grupper vad jag har kallat för en extremvärdesansats. Detta innebär att eleverna betraktade alla summor mellan den minsta och största som möjliga. I omgång två till exempel identifierade eleverna summan 5 som den minsta och summan 9 som den högsta. De 24 markerna placerades därefter så jämnt som möjligt över summorna 5, 6, 7, 8, och 9. Som vi ser ledde detta till att grupper här i den andra omgången valde att placera på utfall som inte är möjliga, nämligen utfallen 6 och 8. Under själva spelet upptäckte eleverna detta relativt snabbt och misstaget fick dem att i fortsättningen vara ännu mera noggranna när de utvecklde och valde sina strategier för att vinna.

Att eleverna enbart fokuserade på möjliga summor tror jag är influerat av deras erfarenheter av tärningsspel i vardagen. I vanliga sällskapsspel görs sällan några djupare analyser om olika utfalls sannolikheter. Däremot vill spelarna ofta ta reda på vilka nummer de ska slå, för att komma på eller undvika ett speciellt område på ett spelbord. Tänk t ex på situationer som uppstår i spelet Monopol. Dessutom genererar inte vanliga tärningar, numrerade från 1 till 6, luckor bland möjliga summor. Vi kan därför anta att eleverna haft väldigt liten, om ens någon, tidigare erfarenhet av tärningssituationer där det kan uppstå luckor bland summorna. De tar för givet att mängden av möjliga summor är utan luckor även i den aktuella situationen. Har man som mål att separera möjliga summor från omöjliga summor, och de enskilda tärningarna och summorna saknar luckor i sin numrering framstår extremvärdesstrategin som både rationell och ekonomisk ur ett modelleringsperspektiv.

Sannolikheter enligt en nummermodell

I tredje och fjärde omgången ändrade eleverna ansats till spelet och började rikta sin uppmärksamhet mot summornas chans. Eleverna noterade att staplarna med marker försvann olika snabbt och att de olika summorna kunde representeras på olika antal sätt. Bilden av summornas chans, dvs andelen gynnsamma utfall för respektive summa, formade eleverna utifrån en nummermodell. Med denna modell matchas summornas chans mot de enskilda tärningarnas numrering. Summorna värderades mot de båda enskilda tärningarnas sammanlagda bidrag för att bilda respektive summa. Som en konkret illustration av modellen kan nämnas att eleverna i omgång tre ansåg att de borde få summan två betydligt oftare än summan fyra, då det fanns betydligt fler ettor än tvåor på tärningarna. Strategin går att jämföra med en generalisering av det Pratt (2000) beskriver i fallet med vanliga tärningar som en symmetriresurs (eng fairness resource); med vanliga tärningar uppfattas ofta summors chans som lika (eng fair) eftersom utfallen på de enskilda tärningarna är lika troliga (fair). Genom att tillämpa nummermodellen visade eleverna att de spontant tog hänsyn till och reflekterade över antalet gynnsamma fall när de resonerade om sannolikheter för sammansatta händelser.

Några avslutande tankar

Jag har här diskuterat det tärningsspel som varit centralt i mitt avhandlingsarbete om elevers sätt att resonera om slump och sannolikhet. Jag har diskuterat och motiverat det sätt på vilket jag förändrat och utvecklat summaspelet. Min förhoppning är att denna diskussion kan fungera som stöd och inspiration när det gäller att konstruera situationer som kan ge elever möjlighet att visa och utveckla sin matematiska förståelse.

Det är framförallt två aspekter jag vill lyfta fram vad gäller det undervisningsmässiga värdet av summaspelet och hur det utvecklats. För det första ser vi att vi med didaktisk design kan utmana elevernas förgivettaganden och få dem att reflektera över de matematiska principer vi vill att de ska förstå. Vi kan få dem att se på ett fenomen på ett nytt sätt som framstår som meningsfullt i den aktuella situationen. För det andra kan vi som lärare använda denna typ av situationer som referenssituationer. Eleverna gör upptäckter i spelsammanhanget som de och läraren kan utnyttja i den fortsatta undervisningen. Genom att introducera centrala idéer för ett ämne på ett för eleverna meningsfullt sätt, inte nödvändigtvis vardagligt meningsfullt, får läraren möjlighet att kommunicera och fördjupa förståelsen för ett innehåll. Ta den kombinatoriska dimensionen i spelet som ett exempel. Med utgångspunkt i att eleverna under spelet har observerat att vissa staplar försvinner snabbare än andra har läraren skapat goda förutsättningar för att eleverna ska kunna ta till sig och förstå utfallsrummets betydelse för händelsers sannolikhet.

LITTERATUR

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in ”purely random” situations. *Educational studies in mathematics*, 23, 557–568.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. I F. Marton & A. Tsui (red), *Classroom discourse and the space of learning* (s 3–40). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning –A study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings.* Doktorsavhandling, Växjö universitet, Matematiska och systemtekniska institutionen.

Nilsson, P. (2009). Elever resonerar om sannolikhet. I Brandell m fl (red), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola*. NCM, Göteborgs universitet.

Pratt, D. (2000), Making sense of the total of two dice. *Journal for research in mathematics education*, 31, 602–625.

Hur arbetar du med sannolikhet?

Nämnaren vill gärna ha fler artiklar om undervisning i sannolikhetslära, för elever i alla åldrar. Vad är det som kan vara svårt för eleverna att förstå? Vilka erfarenheter från vardag och lek kan vi utgå ifrån i undervisningen? Vilka erfarenheter behöver vi skapa utrymme för?

Om du är lärare har du kanske exempel på aktiviteter och lektionsförslag som du kan presentera för läsarna. Kontakta redaktionen om du vill ha riktlinjer eller råd om artikelns utformning, namnaren@ncm.gu.se.