Sätt färg på matten!

GUDRUN MALMER

Gudrun Malmer, har en ovanligt bred och djup erfarenhet av svensk skola. Övningsskollärare på både låg- och mellanstadiet i Lund, 12 år som rektor i Huddinge, läroboksförfattare i både svenska och matematik. Sedan 1975 är Gudrun metodiklektor vid speciallärarlinjen, Lärarhögskolan i Malmö, där hon ägnar sin energi åt fortbildnings- och utvecklingsarbete i matematikdidaktik.

*Kopplingen svenska—matematik är typisk för Gudrun, som i både artiklar och föreläsningar betonar och påvisar språkets betydelse i matematikundervisningen. Rapporten från GUMA-projektet, **Matematik på talets grund** (Lärarhögskolan Malmö) blev med rätta uppskattad bl a för sin LTG-parallella inriktning. Nu håller Gudrun på att kartlägga nybörjares ma-kunskaper i Helsingborg, NYMA-projektet. I samband med detta har hon spelat in en ITV-film om laborativa övningar.*

*I boken **Matematik — ett ämne att räkna med** (Esselte 1984) utvecklar hon sina tankegångar på det klara övertygande sätt, som är hennes kännemärke.*

Arbeta med laborativt material

I början av 1970-talet anordnades en s k länsstudiedag, till vilken en grupp på uppdrag av skolöverstyrelsen ställt samman ett fortbildningsmaterial med temat *Arbeta med laborativt material.* I häftet gavs exempel på övningar med logiska block, multibasmaterial och Cuisenaires färgstavar. Med anledning härav inköptes nämnda artiklar i stor omfattning, och de finns fortfarande kvar på många skolor. Ja, de logiska blocken har i vissa fall överlämnats till förskolan men används även ofta under den första skoltiden. Multibasmaterialet hade en ganska kort blomstringstid. Det är nu mest tiobaskomponenterna som kommer till användning och då också företrädesvis i de lägre årskurserna. Cuisenaire-stavarna används på rätt många ställen, men då nästan uteslutande i nybörjarundervisningen.

Alla de välmenande intentioner som faktiskt avsåg att främja ett mera laborativt arbetssätt och satsningen på ett logiskt, matematiskt tänkande havererade beklagligt nog tillsammans med mängdläran. Men låt oss hjälpas åt att blåsa liv i dem på nytt. Vi måste nämligen alla inse värdet av att eleverna får tillfälle att utnyttja flera olika perceptionsvägar.

Att se och upptäcka

Att själv aktivt ta del i handlingar bidrar till en annan dimension av tänkandet och därmed också av kunskapen. Ett sådant arbetssätt kan bana väg för *produktion* i stället för att blott och bart stanna vid *reproduktion.*

För stora och för tidigt insatta formella krav kan hämma och rent av förkväva kreativiteten. Det har vi fått många belägg för. Matematikämnet utgör definitivt inget undantag. Sixten Marklund har vid ett tillfälle sagt att *matematik är det mest differentierande ämnet i skolsystemet.* Ett sätt att motverka denna effekt är att ge eleverna tillfälle att *uppleva matematik,* att bli delaktiga och medansvariga. Det kan t ex ske genom att de i större utsträckning får välja intresseområden och i samband därmed insamla behövliga fakta. Motivationen blir då betydligt större. Men det kan också ske genom att vi arrangerar sådana inlärningstillfällen, där eleverna själva får arbeta på ett laborativt och undersökande sätt.

Tyvärr har många lärare själva alltför lite kännedom om lämpligt laborativt material och är för övrigt också ganska ovana att handskas med sådant. Det blir alltför ofta specialläraren som får ta hand om den avdelningen, med den påföljden att det laborativa arbetssättet förknippas med svag prestation och därmed får låg status, vilket naturligtvis är mycket olyckligt.

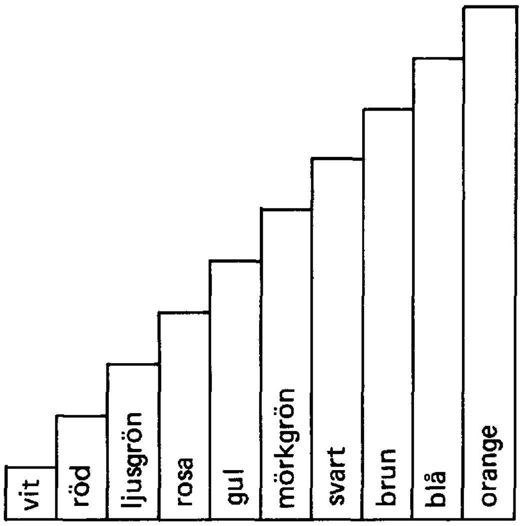
På de fortbildningskurser i matematik som jag lett under senare år har jag avsatt tid för laborationer, vilket har bedömts som värdefullt och har uppskattats av lärare från samtliga stadier.

Cuisenaires färgstavar

I det här sammanhanget väljer jag att beskriva en del övningar, där det kan vara lämpligt att använda Cuisenaires färgstavar. Först några ord om själva materialet.

Stavarnas upphovsman är en belgisk folkskollärare vid namn George Cuisenaire. Materialet består av olikfärgade stavar, där den minsta är 1 cm och den längsta 10 cm lång. Varje längd har sin färg, men stavarna är inte indelade i enheter. Meningen är att en och samma stav ska kunna symbolisera olika tal.

Illustrationen visar hur de olika stavarna relateras till varandra. Av bilden framgår vilka färger de har och vilka förkortningar som brukar användas (*r* = röd, *R* = rosa etc).



Första gången jag mötte dessa stavar var just under den länsstudiedag som jag nämnde i inledningen, i samband med några övningsuppgifter. Jag kan inte påstå att jag då kände mig attraherad av materialet. Speciellt fundersam blev jag över följande formulering i häftet.

> OBS! Den röda är inte främst två enheter lång, utan skall förknippas med namnet två.

Som jag redan tidigare påpekat är stavarna inte indelade i enheter till skillnad från t ex stavarna hos Stern-materialet och tio-stavarna ur Centimo-materialet. De sistnämnda komponenterna, tillsammans med en del andra *strukturella material,* föreföll att på ett bättre och mera konsekvent sätt konkretisera talen och påvisa positionssystemet.

Men senare upptäckte jag stavarna på nytt. Jag fann nämligen att de på ett utmärkt sätt kunde användas för att belysa relationer mellan tal. Det var då en fördel att de inte är indelade i enheter. Mitt intresse vaknade. Undan för undan har jag upptäckt nya möjligheter att använda detta material för att konkretisera och strukturera det matematiska stoffet.

I det i Nämnaren nr 2, årgång 10, beskrivna GUMA-projektet lät vi barnen redan från skolstarten umgås med stavarna, till att börja med under fri lek. Barnen fick också sortera dem och jämföra dem med varandra, de fick ordna dem till trappor, bygga tåg, lägga mattor etc. I alla dessa övningar användes endast färgnamnen för att undvika att stavarna knöts till bestämda tal.

I samband med antalsuppfattning och talskrivning lät vi barnen använda diverse plockmaterial för att senare övergå till strukturellt material, t ex talblock ur *Räkneväskan.*

Under arbetet med stavarna övades många viktiga ord och uttryck, samtidigt som barnen fick uppleva hur matematiska begrepp och samband fungerar.

Tal i bråkform

Redan under de inledande övningarna, då barnen bekantar sig med stavarna och deras inbördes relationer, kan de spontant använda uttryck som *hälften så lång* och *dubbelt så lång*. Några känner också till orden *halv, tredjedel* och *fjärdedel.*

Sådana moment behöver ju inte avskräcka någon, eftersom vi inte har några krav på skriftlig redovisning. Enligt min uppfattning har barn faktiskt mycket lätt att uppfatta tal i bråkform på den här konkretionsnivån. Talen ingår i den vardagliga verkligheten.

Följande övning är intressant därför att den går att använda redan under lågstadiet och med lämpligt stegrad svårighetsgrad även med vuxenstuderande.

Jag ber barnen ta fram den mörkgröna staven.

— Kan ni visa vilken stav som är hälften så lång?

De får pröva sig fram och visar snart att två ljusgröna går att lägga utmed den mörkgröna. Den ljusgröna staven är hälften så lång som den mörkgröna och kan alltså kallas en halv.

— Kan ni nu försöka att hitta den stav som det behövs tre av för att bli lika lång som den mörkgröna?

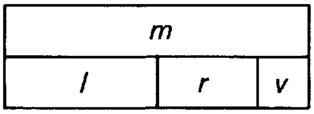
På nytt får de pröva sig fram. De finner att den röda staven uppfyller kraven. Den röda staven kan därför kallas en tredjedel.

Sedan ber jag barnen att lägga både den ljusgröna och den röda staven utmed den mörkgröna. Eleverna ser tydligt att det fattas en bit. Den ljusgröna och den röda tillsammans är inte lika mycket som den mörkgröna.

Jag ber barnen försöka ta reda på den stav som kan "fylla ut luckan". Barnen finner mycket lätt att det är den allra minsta staven, den som något oegentligt kallas "vit" men som egentligen är ofärgad. Vilket namn ska den få? När barnen konstaterat att det behövs sex av det slaget utmed den mörkgröna prövar de med namn som "sexdel" eller "sexondel". Några känner till ordet *sjättedel.*

Man kan naturligtvis nöja sig med att enbart låta barnen lägga stavar och berätta till. Det viktiga är att de gör upptäckter och skaffar sig erfarenheter. Om man vill skriva ner iakttagelserna kan man låta barnen redovisa med hjälp av s k färgalgebra. I stället för namnen på stavarna får de göra färgprickar som symboler. Bokstavsbeteckningar inuti rundlarna ersätter färgerna.

Det aktuella exemplet kan då få följande utseende.



$l + r + v = m$

ljusgrön + röd + vit = mörkgrön

När barnen senare, t ex i åk 4, lär sig att beteckna tal i bråkform, kan denna erfarenhet utnyttjas. De kan då uttrycka delarna i exemplet ovan med tal i bråkform.

$1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$

Troligen finns det en del som anser att exempel av det här slaget inte bör förekomma på mellanstadiet, eftersom talen inte har gemensam nämnare. Men får barnen arbeta med laborativt material, se och upptäcka och hantera delarna, är det inga större svårigheter att få dem att förstå.

Det viktigaste är enligt min mening att de verkligen inser, att ett tal i bråkform i sig egentligen är helt ointressant om man inte vet vad det *hela* är. Uttrycket en halv representerar inget tal i vanlig mening, utan anger *en given del av helheten* eller en storhet. Vi talar inte bara om en halv, utan om ett halvt år, en halv timma, en halv liter etc.

Man kan få många varierande övningar genom att i det aktuella exemplet tilldela den mörkgröna staven olika tal.

— Om vi låter den mörkgröna staven vara 12, vilka tal blir då de övriga stavarna?

Den ljusgröna staven är fortfarande en halv, men blir nu hälften av 12, dvs 6. Då blir den röda 4 och den vita 2.

Övningarna går mycket lätt att variera i svårighetsgrad. Den mörkgröna kan vara 6, 30, 54, 96, 120 etc. Exempel av det här slaget ger verkligen en god övning i huvudräkning.

Varför ska vi då hålla på med tal i bråkform? Ja, det finns åtminstone ett par viktiga skäl. Ett är att vi i så många sammanhang möter uttryck som "var fjärde bil som rullar på våra vägar är en Volvo", "vart åttonde barn i våra skolor är en invandrarelev". Ska vi kunna förstå och tolka sådana uttryck måste vi ha erfarenhet av uppdelningen av en hel i olika delar.

Ett annat mycket viktigt skäl är förståelsen av tal i procentform, som också anger en viss bestämd del av helheten och inte i sig själv representerar ett tal i vanlig mening.

Procentbegreppet

Procentbegreppet och procenträkning utgör en mycket väsentlig del av vardagslivets räkning. Tyvärr har man kunnat konstatera, hur såväl elever i skolan som vuxna uppvisar stora brister vad gäller förståelsen av begreppet och i förmågan att utföra beräkningar.

Det nu i det närmaste klassiska exemplet med brunögdheten hos skolbarn är bara ett av många exempel.

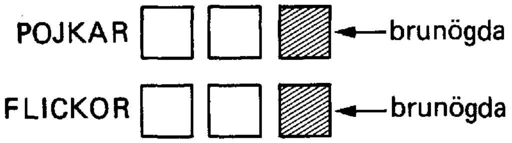
> *34 % av alla skolpojkar är brunögda. 34 % av alla skolflickor är också brunögda. Hur många procent av alla skolelever är brunögda?* (Se *Nämnaren* nr 2 och 3 årgång 9.)

I ett par undersökningar har man funnit att fyra av fem avger det felaktiga svaret 68 %. Detta kan säkerligen ha flera olika orsaker. Men eftersom det handlar om matematik har många den uppfattningen, att man måste utföra något slags uträkning. Vad är då naturligare än att använda addition? Ordet *alla* för givetvis tanken till en sammanläggning (pojkar och flickor). Troligen fixeras många av talet 34 utan att kunna tolka uttrycket 34 %. Man tar helt enkelt inte tillräcklig hänsyn till procenttecknet. Att 34 hundradelar uttrycker en viss del av helheten har många uppenbara svårigheter att tolka.

Vid några tillfällen har jag presenterat ungefär samma innehåll på följande sätt.

Jag placerar tre räknelappar (röd/gula, vändbara) med gula sidan uppåt och säger att de föreställer en grupp pojkar. Så vänder jag på en av lapparna, så att den röda sidan kommer uppåt. Den lappen ska visa hur stor del av pojkarna som är brunögda. Alla brukar med lätthet se att det är en tredjedel. På liknande sätt placeras sedan tre lappar föreställande en grupp flickor. Även här vänds en av lapparna för att markera andelen brunögda. Nu uppstår frågan *hur stor del av alla barn* som är brunögda.

Konkretiseringen hjälper helt säkert många fram till ett riktigt svar, en tredjedel eller två sjättedelar. Svaret två tredjedelar har ännu inte förekommit vid något tillfälle.



Eleverna har betydligt lättare att förstå procentbegreppet om de först laborativt fått arbeta med tal i bråkform och därvid också fått en säker uppfattning om de vanligaste bråkdelarna.

Visst är det lättare att få en uppfattning av vad en fjärdedel av 24 är än vad 25 % av 24 är? Vid överslagsräkning är det både enklare och naturligare att överföra tal i procentform till tal i bråkform.

Att tal i bråkform fått "dåligt rykte" och anses svårt för eleverna beror säkerligen på det sätt på vilket det presenteras. Det sker på en alltför hög abstraktionsnivå. Vanligtvis åskådliggörs momentet med hjälp av "tårtbitar", men eleverna får sällan själva laborera och upptäcka samband. Det är viktigt att de får använda olika slag av material. Färgstavarna är ett utmärkt komplement. Jag önskar att lärare bekantade sig med materialet. Det har oanade möjligheter!

Problemlösning

Eftersom jag här i första hand valt att ge exempel på hur man kan använda färgstavarna, är det naturligt, att jag tar med några uppgifter, där det gäller att belysa olika förhållanden.

1. Ena dagen klipper Per hälften av gräsmattan. Nästa dag klipper mor hälften av det som är kvar. Sedan klipper far resten. Hur stor del av gräsmattan klipper far?

Här gäller det att söka ut en lämplig stav som ska föreställa gräsmattan. Det går ju inte att bara ta en ur högen, eftersom en annan stav ska vara hälften så lång och ytterligare en annan ska motsvara hälften av denna.

Då man prövar finner man att både den rosa och den bruna staven motsvarar kraven. Bilden här visar lösningen.

brun		
rosa	röd	röd

b = hela gräsmattan
R = den del Per klipper
r = den del mor klipper
r = den del far klipper, 1/4 av gräsmattan

2. Åsa fick en tredjedel av en chokladkaka. Per tog en dubbelt så stor bit. Hur mycket blev kvar till lillasyster Anna?

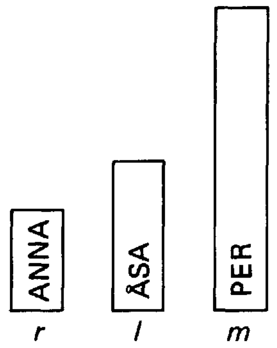
På liknande sätt som i föregående exempel får eleverna pröva sig fram. Eftersom ordet tredjedel förekommer måste de söka reda på en stav som är tre gånger så lång som en annan. De som är vana vid materialet tar ganska snabbt fram den mörkgröna, som då får föreställa hela chokladkakan. Den röda staven blir Åsas bit. Pers bit ska vara dubbelt så stor och därför passar den rosa staven. Då både den röda och den rosa staven läggs utmed den mörkgröna motsvarar de *hela* kakan. Där blir ingenting över till lilla Anna.

mörkgrön	
röd	rosa

m = hela chokladkakan
r = Åsas del
R = Pers del

3. Åsa är hälften så gammal som Per. Per är tre gånger så gammal som Anna. Vem är yngst?

Här anges ingen ålder på någon av dem. Däremot får vi veta förhållanden vid ett bestämt tillfälle.



Eleverna tar snabbt fram lämpliga stavar. Illustrationen visar en lösning. I anslutning till denna kan man sedan ställa frågor:

Hur gamla är de övriga barnen om vi antar att
a) Per är 6 år?
b) Åsa är 6 år?
c) Anna är 6 år?

Då lärargrupper arbetar med det här exemplet, har jag ibland lite försåtligt frågat, om de kan visa hur åldersfördelningen ser ut efter ett år (med utgångspunkt från den första formuleringen). Aningslöst lägger många till en vit stav till var och en av stavarna. Alla blir ju ett år äldre.

Att de därmed också fixerar åldern för samtliga tänker de inte på. Men om man bestämmer att den vita staven ska vara ett, måste ju den röda bli två, den ljusgröna tre och den mörkgröna 6. Eftersom vi inte visste de inblandades ålder är det heller inte möjligt att visa hur det kommer att se ut efter ett år.

Stavarna kan självklart även användas i andra sammanhang. Ibland är det lämpligt att låta den minsta staven (den vita) representera talet ett (den orange blir då 10), men i andra exempel kan stavarna representera andra tal. Det väsentliga är att *den inbördes relationen mellan stavarna alltid förblir densamma.*

Här följer några exempel som belyser andra tillämpningsområden.

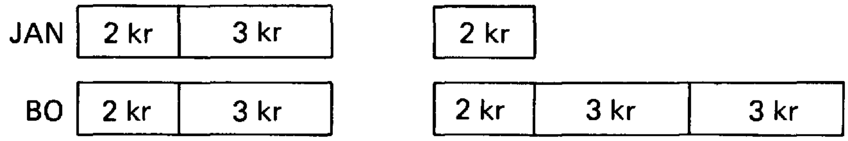
4. — Jag har två kronor, sa Jan till Bo. Men om du ger mig tre av dina, så har vi lika många sedan. Hur många kronor hade Bo från början?

I det här exemplet är det naturligt att låta den vita staven vara ett. Den röda föreställer då två och den ljusgröna tre.

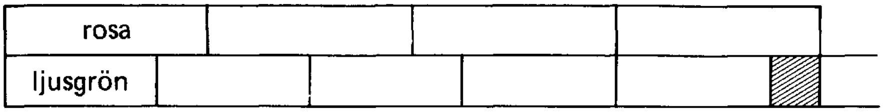
Det är mycket viktigt att barn verkligen får hjälp med att strukturera och analysera den här typen av exempel. De är svåra, beroende på att en överföring från den ena mängden till den andra medför både en subtraktion och en addition.

Det enklaste är att lägga slutresultatet som på den första bilden. Det går sedan lätt att flytta tillbaka Bos 3 kr (den ljusgröna staven). Man ser då lätt att han haft 8 kr från början.

4)



5)



5. 4 kg honung ska fördelas på burkar som rymmer 3/4 kg var.
a) Hur många burkar blir fulla?
b) Hur många burkar behövs?
c) Till hur stor del blir den sista burken fylld?
d) Hur mycket honung blir det i den sista burken?

Första steget innebär att välja en lämplig stav som ska motsvara 1 kg. Eftersom varje burk ska rymma 3/4 kg finns det här ett relationsförhållande att ta hänsyn till. Man kan välja antingen den rosa staven eller den bruna staven. Väljer man den rosa för honungen, måste man välja den ljusgröna för burkarna.

Illustrationen visar ett sätt att placera stavarna. Den övre raden visar alltså honungsmängden (4 kg) och den nedre raden de burkar som behövs.

På fråga c) är svaret 1/4 ganska vanligt. Den på bilden streckade delen — den mängd honung som kommer att finnas i den sjätte burken — relateras felaktigt till den rosa staven. Då det gäller *del av burk* måste man jämföra med den ljusgröna staven. Då ser man att delen motsvarar 1/3. Svaret 1/4 eller rättare 1/4 kg är ett riktigt svar på fråga d).

Det kan ju för övrigt vara intressant att fundera över hur man skulle lösa uppgiften utan laboration.

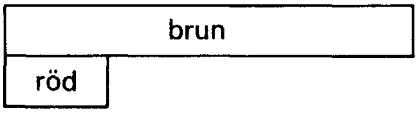
Färgstavarna fyller en funktion

Ska färgstavarna bli accepterade som ett hjälpmedel utanför lågstadiet måste lärare upptäcka att de verkligen fyller en funktion. Vi behöver öva upp vår förmåga att hantera materialet och välja ut lämpliga användningsområden. Vi får finna oss i att många elever kan komma med uppslag och idéer som vi inte själva tänkt på. Vi lärare är ju faktiskt i många fall "yrkesskadade". De stränga formella kraven i matematik har inte bara hämmat elevernas kreativitet utan också lärarnas!

Det behövs en del material, som i varje fall i ett initialskede hjälper läraren vid planeringen. Avslutningsvis presenterar jag några uppgifter, som hämtats ur kopieringspärmen *Matematik är roligt* (Esselte Studium 1985). På originalbladen, som är i A4-format, motsvarar rektanglarna de aktuella stavarna.

Stavarna anger förhållanden. Vet man vilket tal den ena staven representerar, kan man med ledning därav bestämma värdet på den andra. Använd gärna en uppsättning stavar och lägg exemplen. LYCKA TILL!

a)

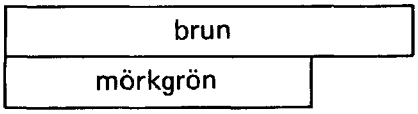


$b = 8$	$b = 20$	$b =$ ___
$r =$ ___	$r =$ ___	$r = 4$
$b = 1$	$b =$ ___	$b = 2$
$r =$ ___	$r = 1/2$	$r =$ ___

b)

$m = 6$	$m = 18$	$m =$ ___
$R =$ ___	$R =$ ___	$R = 8$
$m = 1$	$m =$ ___	$m = 1\ 1/2$
$R =$ ___	$R = 1/2$	$R =$ ___

c)



$b = 8$	$b = 4$	$b =$ ___
$m =$ ___	$m =$ ___	$m = 30$
$b =$ ___	$b = 60$	$m =$ ___
$m = 18$	$m =$ ___	$m = 3/4$

Strukturella material

Stern-materialet är ett strukturellt material av trä med ett stort antal komponenter. Talen 1—10 representeras t ex av stavar, bestående av motsvarande antal entalskuber. Varje längd har sin egen färg och stavarna är tydligt indelade i enheter. Entalskuben har en sida på ca 20 mm.

För att belysa positionssystemet kan man välja låda med entalsblock, tiotalsstavar och tusenkub, innehållande tio hundratalsplattor.

Materialet har utformats av Catherine Stern, som också skrivit en mycket intressant och fyllig metodikbok som på svenska heter *Barnen upptäcker talens värld* (NoK 1951).

Centimo är benämningen på ett annat tiobasmaterial, också i trä. En laborationssats innehåller 100 entalskuber, 20 tiotalsstavar, 10 hundratalsplattor och 1 tusenkub. Den lilla kuben har sidan 1 cm.

Multibasmaterialet innehöll, förutom material för basen tio, material (små-kuber, stavar, plattor och stor-kuber) för baserna tre, fyra, fem och sex.

Unifix är också ett strukturellt material bestående av ett stort antal komponenter. Kuberna, som är av mjukplast, har ungefär samma dimension som Stern-klossarna men kan fogas samman till stavar av önskad längd. Kuberna levereras i satser om 100 stycken i tio olika färger (tio av vardera).

Räkneväskan innehåller olikfärgade block, där kvadraterna ordnats parvis, så att udda och jämna tal åskådliggörs. Varje tal har sin egen färg. Väskan innehåller två av vardera blocket för talen 1—9 och fem för talet 10. Materialet är speciellt användbart inom de första tiotalen, då talens uppdelning och sammansättning måste få stort utrymme.