

Elevers skriftliga räknemetoder i addition och subtraktion

I de insamlingar av elevlösningar och resultat på nationella prov som PRIM-gruppen regelbundet gör går det att utläsa vissa tendenser. Här beskriver författarna vad de ser i de analyser de har gjort av elevers förmåga att välja och använda olika skriftliga räknemetoder.

De nationella proven i matematik i årskurs 3 utgår främst från kunskapskravet i Lgr 11 och en del som de avser att pröva är användandet av skriftlig räknemetod. I syftet för ämnet matematik står att eleven ska utveckla förmågan att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och i kunskapskravet kan vi läsa:

Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande matematiska metoder med viss anpassning till sammanhanget för att göra enkla beräkningar med naturliga tal [...]. Vid addition och subtraktion kan eleven välja och använda skriftliga räknemetoder med tillfredsställande resultat när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–200.

Under de tre senaste åren, 2014–2016, har elever i årskurs 3 mött två identiska uppgifter i addition och tre i subtraktion på de nationella proven. Därför finns möjligheten att över denna treårsperiod analysera elevernas val och användning av skriftlig räknemetod samt att göra jämförelser mellan åren.

I PRIM-gruppens årliga rapport *Ämnesprovet i matematik årskurs 3* från december 2016 konstateras att eleverna generellt har blivit något bättre på att använda skriftliga räknemetoder. I denna artikel vill vi mer ingående beskriva det vi ser i våra analyser av elevers visade kunskaper inom detta område. Frågor som vi ställde oss:

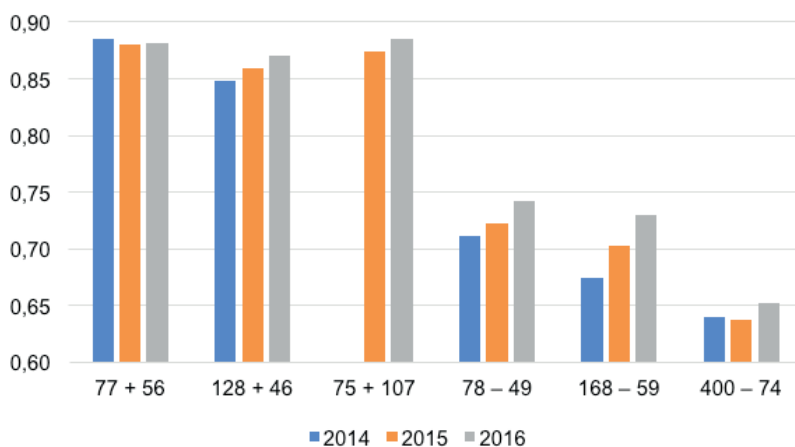
- ♦ Har eleverna blivit säkrare på alla skriftliga räknemetoder?
- ♦ Vilken skriftlig räknemetod väljs mest frekvent av eleverna och skiljer sig detta mellan åren?
- ♦ Väljer eleverna att använda samma skriftliga räknemetod för alla uppgifter eller väljer de olika skriftliga räknemetoder beroende av uppgift? Är detta något som har förändrats under åren?

PRIM-gruppen gör två olika insamlingar av provresultat för de nationella proven i årskurs 3. En större digital slumpmässig insamling där lärare fyller i resultat på uppgiftsnivå för elever som är födda den 15:e i någon av årets månader. Det görs också en slumpmässig insamling av elevlösningar från cirka 500 elever

och den används för att göra kvalitativa analyser på uppgiftsnivå. Ytterligare en insamling av resultat för alla elever i Sverige görs av Statistiska centralbyrån, SCB, på uppdrag av Skolverket och en sammanställning av den finns på Skolverkets webbplats.

Resultat av PRIM-gruppens digitala insamling 2014–2016

I våra statistiska analyser ser vi att eleverna behärskar skriftliga räknemetoder för addition bättre än för subtraktion. Inom addition varierar lösningsproportionen mellan cirka 85 och cirka 90 procent. Vi ser inga statistiskt signifikanta skillnader inom addition mellan åren 2014 och 2016. Vad gäller subtraktionsuppgifterna ser vi för samma år en signifikant ökning i andelen elever som använt en skriftlig räknemetod korrekt för att lösa uppgifterna. Inom subtraktion varierar lösningsproportionen mellan cirka 65 procent och cirka 75 procent.



Lösningsproportionen per uppgift. Då uppgifterna i ämnesprovet omfattas av sekretess visar vi uppgifter som liknar de som eleverna har löst i det nationella provet.

Elevlösningar ger underlag för en kvalitativ analys

Analysen på uppgiftsnivå bygger på ett urval av de inskickade elevlösningarna. För provet som genomfördes 2014 har över 400 elevers lösningar analyserats och för provet 2016 analyserades över 300 elevlösningar. Analysen behandlar elevernas val och användande av skriftliga räknemetoder i fem uppgifter som återkom. Vi har även tagit med en additionsuppgift som inte är identisk mellan 2014 och 2016.

I de analyserade uppgifterna ska eleverna använda och visa en skriftlig räknemetod och skriva svar. De ska inte förklara med ord och bilder hur de har löst uppgifterna.

De vanligaste skriftliga räknemetoderna

De skriftliga räknemetoder som eleverna i huvudsak använder har PRIM-gruppen valt att benämna standardalgoritm, talsortsvis beräkning, stegvis beräkning, kompensationsberäkning och fast differens. Svenska matematikdidaktiker som Per-Olof och Christine Bentley, Bengt Johansson, Kerstin Larsson, Madeleine Löwing och Wiggo Kilborn använder ibland andra benämningar för samma metoder. För att tydliggöra metoderna ger vi en kort beskrivning. Kompensationsberäkning används enbart inom addition och fast differens enbart inom subtraktion. De andra metoderna används i båda räknesätten.

Standardalgoritm

I en standardalgoritm ställs talen i uppgiften talsortsvis lodrätt under varandra. Eleverna adderar respektive subtraherar talsorterna var för sig. I addition växlas till en talsort med högre värde när summan blir mer än nio. I subtraktion växlas från närmaste talsort med högre värde när minuenden är lägre än subtrahenden, som i vårt andra exempel där minuenden är 2 och subtrahenden är 9, dvs $2 - 9$.

Exempel addition

$$\begin{array}{r} \overset{1}{3}7 \\ +54 \\ \hline 91 \end{array}$$

Exempel subtraktion

$$\begin{array}{r} \overset{10}{7}2 \\ -39 \\ \hline 33 \end{array}$$

Talsortsvis beräkning

Vid talsortsvis beräkning skrivs talen i uppgiften längs en vågrät linje. Eleverna börjar med att addera respektive subtrahera varje talsort för sig. Därefter summeras talsorterna.

Exempel addition

$$37 + 54 = 30 + 50 + 7 + 4 = 80 + 11 = 91$$

Exempel subtraktion

$$72 - 39 = (70 - 30) + (2 - 9) = 40 + (-7) = 33$$

I våra utprövningar ser vi att många elever delar upp beräkningen utifrån talsorter och skriver varje del i beräkningen på en ny rad.

$$37 + 54$$

$$30 + 50 = 80$$

$$7 + 4 = 11$$

$$80 + 11 = 91$$

Ibland beskrivs att det finns två olika versioner av talsortsvis beräkning, dels en för addition, dels en för subtraktion. Se exempelvis tidigare Nämnarenartiklar av Kerstin Larsson.

Stegvis beräkning

I både addition och subtraktion är det vanligast att den ena termen behålls hel medan den andra termen delas upp i lämpliga delar vid en stegvis beräkning.

Exempel addition

$$37 + 54$$

$$37 + 50 = 87; 87 + 4 = 91$$

Exempel subtraktion

$$72 - 39$$

$$72 - 30 = 42; 42 - 9 = 33$$

Även här ser vi många elever som delar upp beräkningen och skriver varje delberäkning på en ny rad.

$$72 - 39$$

$$72 - 30 = 42$$

$$42 - 9 = 33$$

Det fåtal elever som använder sig av en tallinje använder sig också av en stegvis beräkning. I addition utgår eleverna från en av termerna och delar upp den andra termen i lämpliga delar och adderar stegvis längs tallinjen. I subtraktion utgår eleverna från subtrahenden och adderar stegvis tills de kommer fram till minuenden. När eleven använder "bakifrån med plus" är det samma metod men utan tallinjen som stöd.

Kompensationsberäkning

I kompensationsberäkningar vid addition ändras antingen en eller båda termerna så att beräkningen förenklas. I den aktuella elevgruppen är det vanligast att båda termerna ändras på en gång. I vårt exempel adderas den ena termen med ett antal så att den blir ett jämnt tiotal, den andra termen subtraheras med samma antal så att summan är konstant. Det finns olika namn på undergrupper inom kompensationsberäkningar.

Exempel addition

$$37 + 54 = 40 + 51 = 91$$

Fast differens

Metoden i subtraktion där de ingående talen ändras så att beräkningen förenklas kallar vi för fast differens. Båda termerna adderas eller subtraheras med samma antal så att differensen är konstant.

Exempel subtraktion

$$72 - 39 = 73 - 40 = 33$$

Elevernas metodval

Vilken metod är vanligast att eleverna väljer att använda?

Addition

Den skriftliga räknemetod som används till flest uppgifter i addition är standardalgoritmen. Vi ser en ökning från cirka 55 procent till nästan 70 procent. Den metod som är näst vanligast är talsortsvis beräkning och där ser vi en minskning från cirka 40 procent av uppgifterna 2014 till cirka 20 procent av uppgifterna 2016. Andelen uppgifter lösta med stegvis beräkning är ungefär lika stor under båda åren, cirka 5 procent. Kompensationsberäkning används i mycket liten utsträckning båda åren.

Subtraktion

Den skriftliga räknemetod som används till flest uppgifter i subtraktion är standardalgoritmen. Vi ser en ökning av användandet, från cirka 55 procent till nästan 70 procent. Den metod som är näst vanligast för eleverna att använda är stegvis beräkning. Andelen uppgifter lösta med stegvis beräkning är ungefär lika stor under båda åren, cirka 20 procent. Vi ser en minskning av talsortsvis beräkning. Talsortsvis beräkning används till cirka 15 procent av uppgifterna 2014 och till cirka 5 procent av uppgifterna 2016. Fast differens används i mycket liten utsträckning båda åren.

Samma metod eller olika?

De belgiska forskarna Joke Torbeyns och Lieven Verschaffel menar att elever kan ha olika anledningar till sitt metodval för uppgifter de ska beräkna. Valet kan exempelvis bero på uppgiftens struktur och ingående tal, om eleven kan en metod bättre än andra eller upplever att någon metod uppskattas mer av lärare eller föräldrar. I vår analys ser vi att majoriteten av eleverna håller fast vid en och samma skriftliga räknemetod oavsett räknesätt och ingående tal. Både 2014 och 2016 är det cirka 65 procent av alla elever som använder samma skriftliga räknemetod till samtliga sex uppgifter. Av dem väljer 9 av 10 standardalgoritm 2016 i jämförelse med 7 av 10 år 2014. De elever som väljer standardalgoritm till samtliga uppgifter har alltså ökat med 20 procentenheter från 2014 till 2016.

Det finns elever som använder samma metod till fem av uppgifterna och byter metod till en av uppgifterna, elever som använder samma metod till fyra av uppgifterna och byter metod eller metoder till två av uppgifterna och så vidare. För de elever som använder samma metod till som mest tre av uppgifterna hittar vi elevlösningar med kompensationsberäkning och fast differens. Dessa elever utgår troligen från uppgifternas ingående tal och struktur när de väljer vilken metod de ska använda och har uppenbarligen fler metoder som de kan välja att använda.

” ... och har
uppenbarligen
fler metoder som de
kan välja att använda.

Uppgifterna som eleverna möter i de nationella proven är noga utvalda och utprovade för att pröva elevernas kunskaper i användandet av skriftliga räknemetoder. I *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik* står det:

Förmågan, som finns i ett av de långsiktiga målen i kursplanen, omfattar att kunna identifiera vilken metod som lämpar sig bäst i den enskilda situationen och därefter kunna genomföra denna på ett mer eller mindre effektivt sätt.

Hur väl fungerar metoderna?

Addition

I addition använder eleverna främst metoderna standardalgoritm, talsortsvis beräkning och stegvis beräkning. Det är i stort sett lika stor andel elever, cirka 90 procent, som använder sin metod korrekt oberoende av vilken metod de väljer att använda sig av och oberoende av vilken uppgift det är. Detta gäller för båda åren.

Subtraktion

I subtraktion ser vi att elevernas val av skriftlig räknemetod till en specifik uppgift har större betydelse för hur eleverna klarar att lösa uppgiften. I alla subtraktionsuppgifter använder eleverna i högre utsträckning standardalgoritmen 2016 jämfört med 2014. För talsortsvis beräkning och stegvis beräkning gäller det omvända, användandet har minskat.

Analysen på uppgiftsnivå

För att kunna fördjupa analysen på uppgiftsnivå behöver vi exemplifiera. Då ämnesprovet omfattas av sekretess använder vi här tre liknande uppgifter.

Uppgift 78 – 49 =

Den skriftliga räknemetod som är vanligast för att lösa denna uppgift är båda åren *standardalgoritm* och vi ser en ökning av användandet. År 2014 använde knappt 60 procent metoden jämfört med drygt 70 procent 2016. Av dessa elever använder cirka 75 procent metoden korrekt 2014 jämfört med cirka 80 procent 2016.

Eleverna använder *talsortsvis beräkning* i mindre utsträckning 2016 jämfört med 2014, en minskning från cirka 20 procent till cirka 10 procent. Av dem använder cirka 40 procent metoden korrekt 2014 jämfört med cirka 25 procent 2016.

Vi ser en liten minskning i andelen elever som valt att lösa uppgiften med *stegvis beräkning*, från 15 procent till 10 procent. Av dessa elever har i stort sett alla använt metoden korrekt under båda åren.

Uppgift 168 – 59 =

Även för denna uppgift är det vanligast att *standardalgoritmen* används och även här ser vi en ökning i användandet, från knappt 60 procent till drygt 70 procent. Av dessa elever använder cirka 75 procent metoden korrekt 2014 jämfört med cirka 80 procent 2016. Denna ökning följer precis samma mönster som för den föregående uppgiften.

Talsortsvis beräkning användes i mindre utsträckning, cirka 5 procent 2016 jämfört med cirka 20 procent 2014. Av de elever som väljer talsortsvis beräkning använder cirka 30 procent metoden korrekt 2014 jämfört med 15 procent 2016.

Den andel elever som använder *stegvis beräkning* är cirka 15 procent under båda åren och vi ser en nedgång i hur eleverna lyckas lösa uppgiften med den metoden. År 2014 använde cirka 95 procent av eleverna metoden korrekt jämfört med cirka 70 procent 2016.

Bara ett fåtal elever har valt att använda metoden *fast differens* trots att ingående tal inbjuder till denna skriftliga räknemetod. De elever som väljer den använder den korrekt.

Uppgift 400 – 74 =

Även för denna uppgift är det vanligast att använda *standardalgoritm* som skriftlig räknemetod, även om metoden inte används i lika stor utsträckning som i de två tidigare uppgifterna. År 2014 använde knappt 50 procent standardalgoritmen och 2016 cirka 65 procent. Av dessa elever är det båda åren cirka 65 procent som använder metoden korrekt.

Den metod som är näst vanligast är *stegvis beräkning*. Detta gäller för båda åren även om vi ser en minskning i användandet. År 2014 var det cirka 35 procent som valde denna metod och 2016 var det cirka 25 procent. Av dessa elever har mer än 90 procent använt metoden korrekt och det gäller för båda åren.

Är det då inga elever som använt *talsortsvis beräkning* som metod för denna uppgift? Vi ser att eleverna utgår från 400 och subtraherar 70. Sedan utgår de från 330 och subtraherar 4. Detta anser vi är en stegvis beräkning. I vår analys ser vi många elever som använt talsortsvis beräkning för de fem övriga uppgifterna för att sedan på denna uppgift byta till stegvis beräkning. Det är några få elever som använder en talsortsvis metod, vilket blir komplicerat eftersom det "saknas" både tiotal och ental i minuenden.

Sammanfattning av analys på uppgiftsnivå i subtraktion

Standardalgoritmen är den skriftliga räknemetod som eleverna använder mest frekvent och vi ser att en större andel elever har lyckats med metoden i uppgifterna 78–49 och 168–59 jämfört med i 400–74. Det beror troligtvis på att den sista uppgiften är svårare i och med växlingar över noll.

Den stegvisa metoden är den som störst andel elever använder korrekt i uppgifterna 78–49 och 400–74. I uppgiften 168–59 är standardalgoritmen den metod som störst andel elever använder korrekt.

Vi ser att talsortsvis beräkning är den skriftliga räknemetod som eleverna har svårast att hantera korrekt.

Två av tre väljer genomgående samma räknemetod

Inom båda räknesätten är det en större andel elever som använder standardalgoritmen 2016 jämfört med 2014. Den statistiskt signifikanta ökningen av elevernas resultat i subtraktion i de nationella proven, som vi konstaterade mellan 2014 och 2016, beror troligen på att en större andel elever använder standardalgoritm i stället för talsortsvis beräkning och att eleverna troligtvis behärskar standardalgoritmen bättre. Talsortsvis beräkning är den skriftliga

räknet metod som eleverna har svårast att behärska inom subtraktion och eleverna behärskar den mindre väl 2016 jämfört med 2014. De elever som använder stegvis beräkning gör detta mer framgångsrikt än de som valt standardalgoritmen i två av de tre subtraktionsuppgifterna. Här ser vi dock att det är mindre vanligt att elever använder stegvis beräkning 2016 jämfört med 2014.

Det är en majoritet av eleverna, två av tre, som genomgående använder endast en och samma skriftliga räknet metod till alla sex uppgifterna. Det gäller både åren och oftast är det just standardalgoritmen som används.

Att fundera över

Utifrån det som framkommit i analyserna kan det vara intressant att enskilt, eller i sitt arbetslag, reflektera kring sin undervisning av skriftliga räknet metoder.

- ◇ Vad skulle det kunna bero på att standardalgoritmen ökar i användning medan de andra metoderna minskar?
- ◇ Hur stämmer den utveckling vi beskrivit i artikeln med kursplanens skrivningar att eleverna ska få tillgång till olika metoder?
- ◇ En majoritet av eleverna använder samma skriftliga räknet metod till alla sex uppgifter. Kan elevernas matematiska kunnande påverkas av att de använder endast en skriftlig räknet metod?
- ◇ De elever som väljer skriftlig räknet metod utifrån uppgiftstyp, har de ett matematiskt kunnande på högre nivå? Eller kan de ha mött en undervisning som utgått från uppgiftstyp istället för att utgå från metod?

Dessa frågor har sannolikt flera olika svar. Det viktiga är att det finns en medvetenhet kring undervisningen av skriftliga räknet metoder och de val lärare väljer att göra i sin undervisning.

Tack för inskickade elevlösningar

Slutligen vill vi rikta ett stort tack till er lärare som varje år skickar in de elevlösningar som sedan utgör underlag till våra analyser! Med hjälp av dessa analyser är det vår förhoppning att kunna bidra till ökad kunskap kring elevers visade kunskaper i matematik.

Rapporten *Ämnesprovet i matematik årskurs 3* finns att läsa i sin helhet på PRIM-gruppens webbplats www.prim-gruppen.su.se.

En komplett referenslista finns på Nämnamnaren på nätet.

