

Även kvadraten är en rektangel

Vad innebär det att arbeta med geometriska objekt och deras egenskaper i årskurs 1–3? Hur kan vi använda det centrala innehållet i geometri för att utveckla de matematiska förmågorna som lyfts fram i Lgr11? Här berättar författaren hur hon gör för att utveckla sina elevers kunskaper i geometri.

I mitt arbete som lärare och matematikutvecklare möter jag ofta funderingar kring hur man kan arbeta med geometri på lågstadiet. Vad står det egentligen i det centrala innehållet för årskurs 1–3 och hur kopplas detta till förmågorna? Vilka är kunskapskraven för geometri och vad innebär det att eleverna ska kunna? Övningarna i denna artikel är hämtade från lågstadiet men de är till stora delar även överförbara till högre årskurser.

Geometriska begrepp

Geometriundervisning på lågstadiet har, om man generaliserar något, ofta inneburit att eleverna lärt sig namnet på ett antal geometriska objekt, vanligen tvådimensionella men ibland även tredimensionella. De har lärt sig känna igen objekten och har fått leta efter dem i sin omgivning. Dessa övningar har återkommit i olika årskurser men de har sällan utvecklats eller fördjupats. Dessutom visar det sig ofta att eleverna har gjort samma slags övningar redan i förskolan och att många av dem kan identifiera och namnge samma objekt i årskurs 3 som i förskolan. Räcker detta för att nå de mål som sätts upp i Lgr11? Min uppfattning är att så inte är fallet. Vi bör lägga fokus på och reflektera över hur vi kan undervisa för att ge eleverna möjlighet att utveckla de förmågor som kursplanen lyfter fram. Denna artikel inriktar sig framför allt på begrepps-, resonemangs- och kommunikationsförmågorna. I det centrala innehållet under rubriken Geometri, årskurs 1–3, står:

Grundläggande geometriska objekt, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt.

(Skolverket, 2011)

Jag tror det är i meningen *Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt* som vi finner ingången till hur vi kan arbeta. Låt oss börja med några av de tvådimensionella objekten. Våra elever har ofta fått lära sig de fyra ”klassiska” formerna cirkel, triangel, kvadrat och rektangel. Frågan är hur mycket de har lärt sig om dessa objekts *egenskaper* och deras *relation* till varandra?

Jag och mina kollegor är med i ett Learning study-projekt där vi har valt rektangelns egenskaper som lärandeobjekt. Vi hade märkt att eleverna överanvände beteckningen rektangel och namngav även andra fyrhörningar som rektanglar.

Det fick oss att fundera över vilka av rektangelns egenskaper som behöver urskiljas för att kunna skilja en rektangel från övriga fyrhörningar. Eleverna på låg- och mellanstadiet fick beskriva och namnge följande två objekt:



Många elever gav båda objekten namnet rektangel. En elev i årskurs 6 satte ord på den bristande begreppsuppfattningen då hon sa: *En rektangel har fyra hörn och fyra sidor, två korta och två långa. Titta på den figuren* [hon pekar på den högra figuren ovan] *den har ju det!* Vi insåg att eleverna inte hade uppfattat en viktig egenskap hos rektangeln, nämligen de räta vinklarnas betydelse. Eleven satte här fingret på vikten av att utgå från egenskaperna hos objekten. För att kunna göra det bör samtliga dessa egenskaper vara med redan från de första skolåren. Vilka egenskaper uppfattar eleverna när de presenteras för ett objekt, exempelvis rektangeln, och får veta att *Det här är en rektangel?*

Vi har tagit för givet att eleverna har förstått att den räta vinkeln är en av rektangelns egenskaper. Det har visat sig att det inte stämmer med vad eleverna faktiskt har uppfattat. Den räta vinkeln är en kritisk aspekt som eleverna behöver urskilja för att förstå rektangelns egenskaper. Genom att kontrastera rektangeln mot andra fyrhörningar som inte har räta vinklar, exempelvis en parallelogram, kan eleverna bli uppmärksammade på vinkelns betydelse. Begreppet vinkel står inte med i det centrala innehållet för årskurs 1–3, men vår slutsats är att det är ett begrepp som är nödvändigt för att förstå rektangelns egenskaper, alltså behöver vi introducera det så tidigt som möjligt. I kunskapskraven för matematik i årskurs 3 står:

Dessutom kan eleven använda grundläggande geometriska begrepp och vanliga läsesord för att beskriva geometriska objekts egenskaper, läge och inbördes relationer.

(Skolverket, 2011).

De geometriska objektens egenskaper



Det är en utmaning att få eleverna att förstå de geometriska objektens egenskaper och deras inbördes relationer. Jag vill här dela med mig av en övning för att kategorisera objekt efter deras egenskaper:

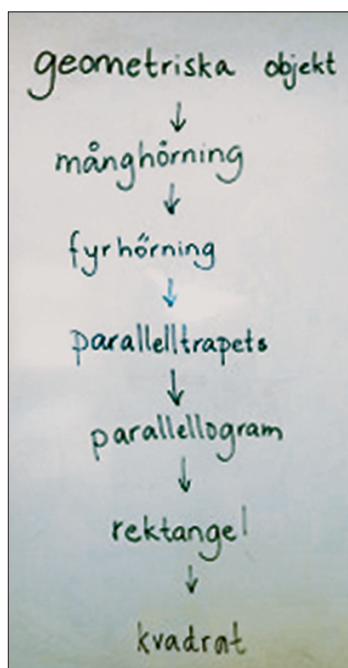
Klipp ut ett antal tvådimensionella geometriska objekt i papper, helst i samma färg. Blanda de i undervisningen vanligen förekommande regelbundna och oregelbundna formerna, allt från cirklar och ellipser till olika typer av månghörningar.

Placera ut dem på golvet eller på tavlan och låt eleverna ställa sig runt omkring. Berätta för eleverna att alla dessa figurer kan kallas geometriska objekt.

- ◇ Skriv **geometriska objekt** överst på tavlan. Min erfarenhet är att bästa sättet att genomföra övningen är att låta eleverna i tur och ordning plocka bort objekt utifrån min beskrivning. Första uppgiften är att ta bort de objekt som *saknar hörn*. Låt en elev i taget ta bort ett objekt som saknar hörn, titta gemensamt på objektet och kontrollera att det verkligen saknar hörn. Namnge dem korrekt, exempelvis cirkel och ellips.

När eleverna tycker att de har tagit bort alla objekt som saknar hörn frågar jag vilket gemensamt namn vi kan ge alla objekt som finns kvar.

- ◇ Skriv **månghörning** på tavlan.
Proceduren upprepas men nu med uppgiften att eleverna ska ta bort alla objekt som *inte har exakt fyra hörn*. Månghörningarna som ska tas bort namnges efter antal hörn och de kan vara regelbundna eller oregelbundna. Resultatet blir att alla objekt som finns kvar är fyrhörningar.
- ◇ Skriv **fyrhörning** på tavlan.
Be eleverna att ta bort alla objekt som *saknar parallella sidor*.
- ◇ Skriv **parallelltrapets** på tavlan.
Be eleverna att ta bort alla objekt som *endast har två sidor som är parallella*.
- ◇ Skriv **parallelogram** på tavlan.
Be eleverna att ta bort alla objekt som *saknar räta vinklar*.
- ◇ Skriv **rektangel** på tavlan.
Be eleverna att ta bort alla objekt som har *olika långa sidor*.
- ◇ Skriv **kvadrat** på tavlan.

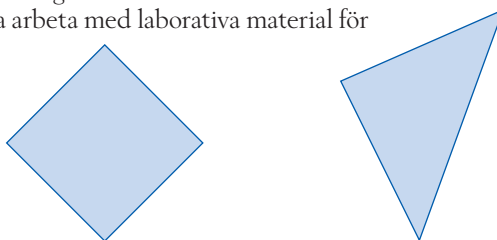


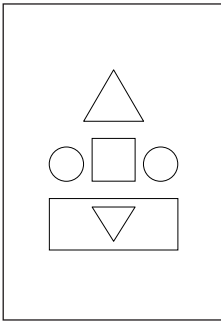
Betona att begreppen bygger på varandra, att en rektangel även är en parallelogram, en parallelltrapets, en fyrhörning och en månghörning. Rektangeln äger alla dessa egenskaper – men det omvända gäller inte. Det vill säga, alla rektanglar är parallelogram men alla parallelogram är inte rektanglar. Eleverna brukar reagera då vi kommit till det steget där vi konstaterat att det namn vi kan ge objekten som är kvar är rektanglar. Det eleverna ser framför sig är vad de är vana att kalla rektanglar respektive kvadrater. I detta steg är det viktigt att göra dem uppmärksamma på att även kvadraten är en rektangel, men ett specialfall av rektangel, där två närliggande sidor har samma längd.

I övningen får eleverna, förutom att de övar sig på olika namn på geometriska objekt, även möta begrepp som parallella sidor och räta vinklar. De lär sig på så vis vilka egenskaper som objekten har. Som en uppföljning till övningen kan eleverna få i uppgift att rita tre olika fyrhörningar och beskriva dem med så många olika matematiska begrepp som möjligt. Detta ger dig som lärare en god uppfattning om elevens begreppsformåga. För att hålla reda på definitionerna av de olika begreppen rekommenderas *Matematiktermer för skolan*.

Rumsuppfattning

En annan aspekt när man ska identifiera objekt är deras position i rummet. Elever kan ha svårt att känna igen objekt om man vrider dem. En enkel lägesförändring ger ett nytt perspektiv. Om vi som lärare är medvetna om detta kan vi på ett enkelt sätt undvika att gå i denna fälla genom att helt enkelt vrida de objekt vi ritar eller visar. Låt även eleverna arbeta med laborativa material för att upptäcka lägesförändringar.



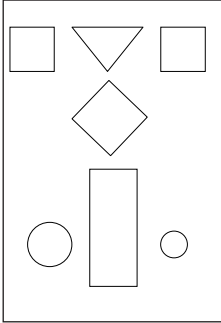


En kvadrat är alltid en kvadrat även om den är vriden och en triangel kan mycket väl ha spetsen neråt. I *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik* står:

Eleverna ska också tidigt få undervisning om och därigenom förståelse för att positionen inte har någon betydelse för den geometriska formen. Det vill säga att exempelvis en triangel fortfarande är en triangel även om den vrids och intar en annan position.

(Skolverket, 2011)

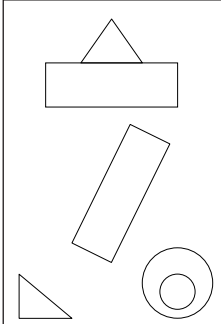
Geometriövning med lägesbegrepp



Syftet med följande aktivitet är att träna namn på geometriska figurer och lägesbegrepp. Material som behövs är, förutom penna och papper, arbetskort. Övningen genomförs i två steg:

1. Eleverna arbetar i par och de ska sitta så att de inte ser varandra, gärna med ryggarna mot varandra. En i varje par får ett arbetskort, den andra har papper och penna. Eleven med arbetskortet beskriver det så noga som möjligt för sin kamrat som ska rita av det utifrån beskrivningen.

När eleverna känner sig färdiga jämför de bilderna med varandra. De byter sedan roller, den som har ritat får beskriva och vice versa. Detta upprepas tills elevparet har använt alla arbetskort.



2. Låt eleverna rita egna bilder med geometriska objekt som de ska beskriva för varandra. Korten kan sedan sparas och olika elevpar kan byta dem med varandra.

Lyft, i en gemensam diskussion, upp vilka begrepp eleverna använde för att beskriva de olika objekten och deras läge. Samla begreppen på tavlan.

Tredimensionella objekt

I vardagen möter eleverna många tredimensionella objekt. Spara gärna olika förpackningar, med tiden kan ni få ihop en mycket användbar samling i klassrummet med prismor, rätblock, cylindrar och kuber. Pyramider, koner och klot är ovanliga i förpackningssammanhang, så dessa kan man behöva komplettera med på annat sätt.

Låt eleverna undersöka de olika objekten och ange hur många *hörn*, *sidoytor* och *kanter* de har. Utnyttja korta stunder i början eller slutet av lektionen till att titta på ett objekt och låta eleverna beskriva det. När eleverna är vana vid detta kan man ställa fram två objekt och låta eleverna parvis diskutera sig fram till minst en likhet och en skillnad mellan objekten. Vid jämförelsen mellan rätblock och kub är likheten att de har lika många hörn, sidoytor och kanter medan skillnaden är att kubens alla sidor är kvadratiska.



Förslag på fler arbetskort, i form av kopieringsunderlag, finns på Nämnamnaren på nätet.

Uppmuntra eleverna att komma på så många likheter och skillnader som möjligt. Kan de komma på likheter och skillnader som ingen annan har sagt? Det gäller även att kunna relatera de tredimensionella objekten till varandra. Exempelvis är kuben ett specialfall av rätblocket, där alla kanter är lika långa och alla sidoytor är kvadratiska. Ett rätblock är också en prisma.

Lattjo lajban

I nästa steg kan man använda den berömda *Lattjo lajban-lådan* från ”Fem myror är fler än fyra elefanter”. Ställ fram tre eller fyra olika objekt och bestäm dig för vilket objekt som inte hör ihop med de andra och varför. Låt sedan eleverna gissa vilket objekt som ska bort och be dem motivera varför. Här är själva motiveringen det viktiga. Eleverna övar sin begreppsförmåga men också kommunikations- och resonemangsförmågorna. Det kan till exempel låta så här: *Prismat ska bort för den har bara fem sidoytor men kuben och rätblocket har sex sidoytor.* Du berättar sedan om förslaget var rätt eller fel. Precis som Brasse, berömmar du deras motivering även om det var ”fel” svar, konstaterar att det var bra men inte det du hade tänkt. Låt eleverna jobba i smågrupper och göra Lattjo lajbanövningar åt varandra.

Punkter, linjer och sträckor

Nu har vi berättat flera av de objekt som räknas upp i kursplanens centrala innehåll men några av dessa återstår: punkter, linjer och sträckor. Om vi börjar med *linjen*, så fascinerar eleverna av att en linje och en kurva är synonymer. Diskutera med eleverna vad som menas med en linje/kurva och låt dem skriva egna definitioner. I vardagsspråket uppfattar vi en linje som något rakt och en kurva som något böjt. Så är inte fallet i matematiken och det är något som vi kan göra eleverna medvetna om. Så här beskrev en av mina elever i tvåan begreppet linje: *Linje kan både vara böjd och rak. Om den e rak kallas den för rak linje. När vi sejer linje tänker vi på en helt vanlig linje.*

Nästa begrepp är *sträcka* och även här skiljer sig vår vardagsuppfattning från matematikens definition. I vardagen säger vi ofta sträcka när vi pratar om sträckans längd, medan det i matematiken handlar om en linje/kurva som är rak och begränsad åt båda hållen.

Det kanske mest utmanande begreppet i det centrala innehållet för årskurs 1–3 är *punkten*. En punkt är ett objekt som har ett läge men saknar utsträckning. Förenklat kan man säga att det är något som finns men inte syns. För eleverna på lågstadiet är dock en punkt framför allt något som man använder när man skriver. *Glöm inte stor bokstav och punkt*, har de ofta hört vuxna säga. Här gäller det att ge dem en uppfattning om vad detta abstrakta begrepp egentligen innebär i matematikens terminologi. Jag har provat att lära eleverna detta begrepp från tre olika infallsvinklar.

En kurva kan vara rak (rät) eller böjd (krökt) samt obegränsad åt båda hållen eller begränsad åt ett håll eller åt båda. Sträcka är en kurva som är rak och begränsad åt båda hållen.

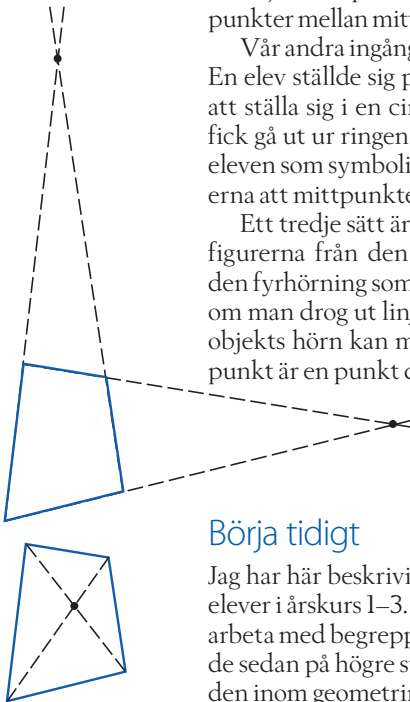
(Matematiktermer för skolan)

Begreppet punkt

För att träna begreppet punkt placerade jag två magneter i olika färger på tavlan med ca en meters mellanrum. Jag uppmanade eleverna att tänka på den punkt som var mitt emellan magneterna och bad dem att ropa sitt namn när jag pekade på denna punkt. Jag drog sedan sakta med pekfingret, från vänster till höger, mellan magneterna. När jag nådde mitten ropade eleverna sitt namn ungefär vid samma tillfälle. Vi pratade om att det fanns en punkt som låg mittemellan de båda ytterkanterna och att eleverna bevisligen kunde tänka sig denna trots att den inte syntes. I nästa steg uppmanades de att tänka på en punkt som låg närmre den högra än den vänstra magneten. Proceduren upprepades genom att jag drog mitt finger mellan magneterna. Eleverna ropade sitt namn, fast nu på olika ställen. Vi funderade över om det kunde finnas ännu fler punkter mellan mitten och den högra magneten och kom fram till att så var det.

Vår andra ingång till begreppet punkt handlade om *mittpunkten* i en cirkel. En elev ställde sig på golvet och utsågs till mittpunkt. De andra uppmanades att ställa sig i en cirkel på samma avstånd från mittpunkten. "Mittpunkten" fick gå ut ur ringen och vi funderade på om mittpunkten fanns kvar, trots att eleven som symboliserade punkten hade gått ur cirkeln. Givetvis förstod eleverna att mittpunkten fortfarande var där!

Ett tredje sätt är att tala om *skärningspunkten*. Jag använde de geometriska figurerna från den första kategoriseringsövningen och valde en oregelbunden fyrhörning som saknar parallella sidor. I vilken punkt skulle sidorna mötas om man drog ut linjer från dessa? Genom att dra linjer från olika geometriska objekts hörn kan man få fram skärningspunkten. Definitionen på skärningspunkt är en punkt där två eller flera linjer eller figurer möts.



Börja tidigt

Jag har här beskrivit några av de övningar som jag använder i mitt arbete med elever i årskurs 1–3. Det är min övertygelse att vi, genom att låta eleverna tidigt arbeta med begrepp på en rad olika sätt, kan ge dem en god grund att stå på när de sedan på högre stadier ska lära sig nya begrepp och arbeta med andra områden inom geometrin.

LITTERATUR

- Kiselman, C., Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
Skolverket (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

LÄNKAR

- Uppslaget: Tyck till om trianglar. Nämnaren 2010:4
ncm.gu.se/media/namnaren/pdf/2010/nr_4/uppslaget_10_4.pdf
Strävorna 5C: Geometri i abstrakt konst
ncm.gu.se/media/stravorna/5c/5C_geometriiabstractkonst.pdf