Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar när vi hjälps åt?

Trösklar i elevers utveckling av proportionella resonemang

Elever har ofta svårt att lösa problem som bygger på enkla förhållanden, som när de får veta hur två delar förhåller sig till varandra men inte får någon helhet given. Här beskrivs varför det är svårt, hur de kan tänka om sådana problem och hur lärare kan undervisa så att eleverna förstår strukturen i dem.

Kan dina elever multiplicera ensiffriga tal? Kan de dividera med 10? Fint! Då finns de procedurkunskaper som krävs för att lösa följande problem:

> Det tar sex timmar för Lisa att måla en vägg. Sara målar samma vägg på fyra timmar. Hur lång tid tar det om de hjälps åt?

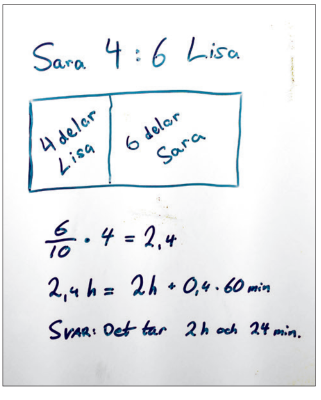
Så lätt det verkar vid en första anblick! Trots det får många elever kämpa hårt för att reda ut hur lång tid det kommer ta för Lisa och Sara att måla väggen. Innan du läser vidare, lägg artikeln åt sidan och lös problemet själv. Men vad är det egentligen som sätter krokben för elever och andra, som inte får styr på sin uträkning? Går det att bena ut vad som är pudelns kärna? Jo faktiskt, med stöd i årtionden av forskning går det vaska fram några centrala trösklar för elevernas utveckling av proportionella resonemang. Och som så ofta är det just resonemanget som är kruxet, inte beräkningarna.

Det är skillnad på *del:del-förhållanden* och *del/helhet-bråk*. Innan vi fortsätter nysta i de undervisningstekniska effekterna av detta påstående är det på sin plats med ett förtydligande. Vi gör skillnad på förhållanden, del:del, och bråk, del/helhet, i linje med hur dessa begrepp beskrivs i forskningsartiklar skrivna på engelska. Nu används inte bråk (eng fraction) i samma betydelse i svenska läroböcker och om det är bra eller dåligt låter vi vara osagt. Föreställ dig en klass med 30 elever, där 16 elever är flickor och 14 pojkar. *Förhållandet* mellan antalet flickor och pojkar är 16:14. Relaterat till hela klassen kan vi *i bråkform* uttrycka att det finns 16/30 flickor och 14/30 pojkar. Forskning har visat att elever runt om i världen har problem med att reflektera över konsekvenserna av dessa olika relationer. Särskilt uppenbart blir det när vi ber våra elever lösa målarproblemet ovan.

Resonemang om problemets lösning

Låt oss tillsammans resonera oss igenom en lösning av problemet, för att identifiera effekterna av förvirringen vid del:del och del/helhet. Vi beskriver nu lösningen som en linjär process, men alla lärare vet att problemlösningsprocesser i allmänhet uppträder som ett virrvarr. Man kan säga, att om inte problemlösningsprocessen är ett virrvarr så är det inget problem, per definition. Så, i vår fiktiva linjära lösning kommer följande att ske: Först och främst inser eleven att Sara är den snabbare och att Lisa är den långsammare av de två målarna. Därefter är det lämpligt att ställa upp en hypotes, en kvalificerad gissning, om att tiden rimligtvis måste vara kortare än snabba Saras tid för att måla väggen själv. Förvånansvärt många av våra elever har glatt redovisat svar som är längre än de fyra timmar snabba Sara använder för att utföra arbetet ensam! Således inte mycket hjälp från Lisa. Här är det på sin plats att vi är självkritiska som lärare och frågar oss vad vi gör med våra elever när de inte ens orkar reflektera över sina svar. Till vilken grad har vi egentligen tråkat ut dem genom åren?

Den inbördes relationen



Tillbaka till de matematiska resonemangen. Vad som händer nu är att eleven beaktar den inbördes relationen mellan Sara och Lisa, som är 4:6, och konstaterar att när snabba Sara har målat 6 delar av väggen så är de resterande 4 delarna färglagda av den lite långsammare Lisa.

Detta är ett intressant steg i resonemanget. Saras och Lisas del:del-förhållande måste relateras till en helhet av tid, för att eleven ska kunna föra resonemanget i mål och slutligen avgöra hur lång tid målandet kommer att ta. Den som föredrar att arbeta efter principen *det enklaste resonemanget är oftast det bästa* (Occams rakkniv) kommer bunta ihop 6 och 4 och relatera målandet till helheten 10. Även om detta ser löjligt enkelt ut vill vi hävda att när det kommer till resonemangskompetens är detta det svåraste steget i lösningen av problemet. Nu kan eleven dra slutsatsen att Sara gör 6/10 och Lisa 4/10 av det totala målningsarbetet.

Eftersom de målar tillsammans och blir klara samtidigt behöver vi bara räkna ut hur lång tid det tar för en av dem att måla sin andel. Snabba Sara kommer bara att använda 6/10 av sin ”ensammålartid”, 4 timmar, dvs $6/10 \cdot 4 = 24/10 = 2{,}4$ timmar. Nu är vi nära vägs ände. Återstår bara ett krux, att omvandla 0,4 timmar till tid i sextiobas: $0{,}4 \cdot 60 = 4 \cdot 6 = 24$ (håll babylonierna ansvariga för det). Det tar alltså 2 timmar och 24 minuter när Sara och Lisa hjälps åt. Det verkar rimligt – eller hur? Till exempel kan man inse att om båda var för sig målade på 5 timmar så skulle det ta 2 timmar och 30 minuter för dem båda tillsammans. Nu är de tillsammans lite snabbare.

Det går naturligtvis lika bra att resonera ur långsamma Lisas perspektiv. Alltså, Lisa kommer bara behöva måla 4/10 av sin tid eftersom Sara samtidigt har betat av 6/10. Nu når vi lösningen genom att beräkna $4/10 \cdot 6$ (Lisas målartimmar) $= 2{,}4$ timmar.

Procedurkunskaper

Låt oss titta på de matematiska procedurerna i lösningen. Eleven behöver kunna multiplicera, $4 \cdot 6 = 24$, samt dividera, $24/10 = 2{,}4$. Därefter kommer övergången från tid i decimalt system till antal minuter på sextiobas. Det senare steget är av underordnad betydelse jämfört med att korrekt resonera (och räkna) sig fram till 2,4 timmar; ett svar som förhoppningsvis tillfredställer de allra flesta lärare.

Ett lektionsförslag

Låt oss då återvända till rubriken. *Varför har så många elever svårt att räkna ut hur lång tid det tar om vi hjälps åt?* Skälet är att många lärare inte belyser den konceptuella betydelsen av del:del-förhållanden respektive del/helhet-bråk. Om du vill hjälpa dina elever att passera denna tröskel ger vi nu ett förslag till undervisningsdesign. Vi vill inte att du betraktar detta förslag som ett recept att följa. Tvärtom, se det som inspiration och anpassa till din kontext, dina elever och era klassrumsnormer.

Vårt förslag är att du inom ramen för en lektion först låter eleverna arbeta enskilt med ett problem som kräver att de skiftar mellan att relatera del:del-förhållanden till del/helhet-bråk, under en fjärdedel av lektionen.

Variera problemet

Den problemtyp som exemplifieras med målarproblemet i inledningen och med ett poolproblem i slutet kan varieras på olika sätt. Dels kan naturligtvis kontexten bytas ut. Om det är en pool som fylls, en vägg som målas eller något liknande som sker, spelar ingen roll för den matematiska strukturen i problemet eller för vilka resonemang som kan användas när man löser det. Svårighetsgraden i problemet beror till viss del på ingående förhållanden. Om två personer målar lika snabbt försvinner i princip hela svårigheten, det blir inte längre samma problemtyp. Det enklaste fallet som representerar problemtypen är om Sara målar på 1 timma och Lisa på 2 timmar. Räknandet blir enklare, men det blir faktiskt också lite enklare att komma på lösningen och tänka sig hela väggen som bestående av tre delar. En avsevärt svårare utveckling av problemet är att blanda in tre personer:

Susanne klipper en fotbollsplan på 4 timmar. Muhammad klipper samma plan på 5 timmar. Linus klipper planen på 6 timmar. Hur lång tid tar det om de hjälps åt?

Lösningen följer inte samma mönster. Det är inte uppenbart hur man genom att räkna på en persons gräsklippning kan lösa problemet. Det är intressant att fundera på varför. En lösning som fungerar är att börja med att räkna ut hur lång tid det tar för två utvalda personer att klippa och sedan relatera till den tredje. Det finns tre varianter av denna lösning, beroende på vilka två personer man börjar med. Om man genomför beräkningarna utan att förenkla de bråk som uppkommer kan man se ett lustigt mönster som ger en ledning till hur en generell formel för motsvarande problem med ett godtyckligt antal personer ser ut. Men då är man på gymnasie- eller möjligen universitetsnivå.

I nästa fjärdedel av lektionen låter du eleverna tala med varandra i par om hur de har attackerat problemet. Därefter, i tredje fjärdedelen, låter du först en elev komma fram och visa sin lösning på tavlan och sedan en elev som har löst på något annat sätt. Finns det fler alternativ så är det bara bra, förutom att du måste kasta ett öga på klockan eftersom den matematiska poängen går förlorad om du inte hinner sammanfatta och belysa hur del:del-förhållandena behöver relateras till en helhet för att ni ska kunna resonera er fram till lösningen. Det gör du den sista fjärdedelen av lektionen. Spinn vidare på elevernas lösningar, för hur de än har angripit problemet så har de förhållit sig till förhållandena. Om det här blir stressigt att genomföra på en lektion kan du ge eleverna problemet i läxa. Då kan ni starta direkt med pardiskussioner eller elevlösningar på tavlan. Du vet ju bäst själv vad som fungerar i ditt klassrum.

Många elever, särskilt i de högre årskurserna, kommer att ha gått en onödigt krånglig väg genom att konstruera en ekvation. Som att skjuta mygg med kanoner! I vårt fall är avsikten just att förstå och resonera om de proportionella relationer som gör sig gällande i problemet. Därför, om det finns elever som har löst problemet med en ekvation, så är det bra att lyfta fram en sådan lösning och jämföra den med lösningen som baseras på proportionella resonemang. Oavsett vilket, så är det viktiga för dig som lärare att i den avslutande genomgången uppmärksamma att den situation som beskrivs i problemet inrymmer ett explicit, klart uttryckt, del:del-förhållande, men att det också finns ett implicit, underförstått, del/helhet-förhållande och att förståelse för båda krävs för att lösa problemet.

Låt tiden gå

Efter den här lektionen, låt det gå några veckor så att eleverna bara vagt minns det här med målningen. Sen är det dags att lyfta ytterligare ett problem av samma karaktär. *Varför ska vi inte göra det direkt, lektionen efter, nu när vi ändå håller på?* Lite grovt beskrivet visar det sig att den typ av inlärning som går ut på att elever övar på att använda en viss lösningsstrategi på ett antal likartade problem under en koncentrerad tid i princip är det sämst kända sättet att lära sig på. Att öva så känns ofta bra. Det känns som att man lär sig, men ur ett minnesperspektiv är inlärning med en låg grad av variation, vilket typiskt också betyder låg grad av ansträngning, inte bra. Minnen verkar formeras mycket bättre när de måste återkallas under ansträngning, som när man bara delvis kommer ihåg dem. Eftersom många problem om proportioner och förhållanden bara kräver elementär procedurförmåga är det möjligt att börja att arbeta med del:del-förhållanden och del/helhet-bråk redan i de tidiga skolåren. Att förstå de olika rollerna som del:del, respektive del/helhet spelar i olika situationer är viktigt för elevernas matematiska utveckling, samtidigt som det är dokumenterat svårt. Just därför är det smart att träna på det under lång tid, dvs introducera problem som rör denna typ av situationer tidigt i elevernas skolgång. Om eleverna tidigt får arbeta med proportionella resonemang som kräver att de identifierar och relaterar delar till delar och delar till helheter, får eleverna fler möjligheter över tid att samla viktiga erfarenheter om begreppen. Det är bra undervisning som utvecklar elevernas begreppsförståelse och resonemangsförmåga!

Vi avslutar med att uppmuntra alla lärare som undervisar elever från årskurs 4 upp till högskola att starta nästa lektion med det inledande problemet, eller följande variant av det.

> En pool är ansluten till två vattenrör. Ena röret kan fylla poolen på 20 timmar. Det andra på 30 timmar. Hur lång tid tar det att fylla poolen med vatten från båda rören samtidigt? (Förutsatt att vattnet rinner med konstant vattenflöde.)

Hör gärna av er och berätta hur det gick! Vi är intresserade av alla betraktelser om elevers förståelse för proportionella resonemang. Våra kontaktuppgifter finns på sidan 2.

Denna artikel kommer att följas upp i kommande nummer.