Rita Barger

# Begåvade elever behöver också hjälp

*Vad, om något, kan och skall lärarna göra för matematiskt begåvade barn? Eller är det så att eftersom de eleverna uppenbarligen förstår matematiken på egen hand borde lärarna ägna sin tid och uppmärksamhet åt de elever som får kämpa. I den här artikeln presenteras argument för att ägna särskild tid åt matematiskt begåvade barn och ges förslag på hur det kan gå till i en heterogen klass med 20 – 30 elever.*

I USA har matematik och begåvning två saker gemensamt: Båda missförstås ofta och båda och är ofta en källa till ängslan. Vårt samhälle behandlar oförmåga att hantera siffror och analfabetism helt olika. Att inte kunna läsa och skriva leder till skamkänslor och ingen vill erkänna att han/hon inte kan läsa. Att inte kunna räkna är dock ingen orsak till skamkänslor. Faktum är att somliga till och med letar efter tillfällen att kunna skryta med sin matematiska oförmåga.

Det amerikanska samhället håller på att vänja sig vid att det finns begåvning. Men, medan vi hyllar idrottslig, musikalisk och artistisk begåvning och talang så motsätter vi oss starkt tanken på att ge barn med teoretisk begåvning särskild behandling. Därför blir matematiskt begåvade barn försummade och understimulerade eller så används de helt enkelt som lärare för sina klasskamrater.

*Rita Barger är professor i matematikdidaktik vid University of Missouri i Kansas City*

## Argument för att ge extra möjligheter till begåvade elever

*Behovet av undervisning*

För det första behöver även begåvade barn bli undervisade, de kan inte lära sig matematik av sig själva. Det är inte så att de har en ”hemlig pipeline” till kunskap. Begåvade elever behöver, precis som andra elever, komma i kontakt med matematiska begrepp och processer. De behöver någon som introducerar intressant, stimulerande och utmanande matematik för dem. De behöver en lärare som kan guida dem antingen genom direkt undervisning eller genom att föreslå saker att läsa. De behöver en lärare som kan titta på deras arbete och

I artikeln används ordet begåvade i betydelsen matematiskt begåvade. Se också sid 16-17.

upptäcka deras missuppfattningar, en som kan visa på problem som belyser deras missförstånd och sedan leda dem vidare.

Det är sant att man i historien kan hitta exempel där detta inte tycks stämma, men det är ändå så att de allra flesta matematiker kan spåra sitt stora intresse och sina färdigheter till någon som tog dem under sina vingar och uppmuntrade dem i deras mödor. Till och med den självlärde indiske matematikern Srinvasa Ramanujan behövde det mentorskap och den handledning han fick av G.H Hardy. Bruce och Hunt (2000) beskriver hur Ramanujans brist på formell utbildning var till förfång. *Many of Ramanujan's proofs have serious gaps in them.... In fact, later mathematicians have often had to wrestle long and hard to produce proofs that are completely water tight*.

Kort sagt är matematisk begåvade elever en alldeles för värdefull resurs för att vi skall bygga deras utbildning på antagandet att de kommer att klara sig, förstå och bli framgångsrika av sig själva. Det är min uppfattning att samhäller förlorar många begåvade matematiker för att de inte får lämplig handledning och undervisning.

### *Rättvisa*

I sin senaste publikation *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), sätter den amerikanska matematiklärarföreningen NCTM rättvisan främst i sin lista av sex principer. *Excellence in mathematics education requires equity – high expectations and strong support for all students* (s 12). Att ha höga krav på begåvade elever betyder att läraren måste förvänta sig att dessa elever lär sig ny och meningsfull matematik varje dag, inte bara någon gång ibland. Höga krav på begåvade elever är idag snarare undantag än regel i de flesta klassrum.

Jag minns en lärare i tredje klass som berättade för en förälder att den enda matematik han lärt kvinnans dotter var hur man multiplicerar tal med nollor i, som t ex 509 x 8. Den tredjeklassaren hade tillbringat 180 dagar i klassen och lärt sig en enda sak i matematik, ändå fick hon toppbetyg och läraren var nöjd.

När begåvade elever rutinmässigt får bra betyg och skriver bra på prov och läxor så utgår lärarna ofta från att de gett tillräcklig undervisning. På senare stadier pekar lärarna ofta på elevernas prestationer som ett bevis på att deras undervisning är tillfyllest. De fortsätter med att hävda att de elever som inte presterar tillräckligt bra antingen inte har förmågan att ta till sig matematik eller inte lägger tillräckligt med tid på sina studier. Problemet är att många av de duktiga eleverna förstod de matematiska begreppen redan innan undervisningen började och i realiteten har lärt sig ytterst lite nytt.

Begåvade barn borde få samma kvalitet och kvantitet på undervisningen som de andra eleverna i klassen. Om de redan känner till de begrepp eller den process som gås igenom med resten av klassen så borde de inte behöva lyssna på en repetition av en förklaring och inte heller behöva gå igenom ytterligare en uppsättning uppgifter som de redan behärskar. Dessa barn måste få alternativ undervisning och uppgifter som leder dem till ny matematisk kunskap och förståelse.

Den rättvisa vi talar om här handlar om lika möjlighet att lära. Precis som andra barn borde begåvade barn ha rätten att lära sig något nytt varje dag. Med Principles and Standards ord: *The talent and interest of these students must be nurtured and supported so that they have the opportunity and guidance to excel* (s 13). Dessa barn måste få se den inneboende skönheten och uppleva spänningen i matematiken.

### *Värld i förändring*

Man kan föra fram många argument för att ge tid och uppmärksamhet till begåvade barn men det främsta argumentet är världens föränderlighet. I en värld som blivit *increasingly complex and dominated by quantitative information in every facet of its economy, mathematical thinking has become indispensable in even the most ordinary jobs* (Van de Walle, 1994, s 4).

Något som karaktäriserar de begåvade elevernas är deras förmåga att dra slutsatser av till synes orelaterade bitar av information och att göra ovanliga kopplingar med sådant de tidigare lärt. När Andrew Wyles bevisade Fermats sista sats såg han ett samband med elliptiska ekvationer som hade undgått andra matematiker i flera hundra år (Devlin 1994). Det är den typen av slutsatser som måste till för att skapa ny matematik och lösa nya problem. Om vi i klassrummen inte ger elever möjligheten att utveckla den här typen av begåvning och problemlösning så kommer många av morgondagens lösningar att bli onödigt fördröjda.

## Hur kan man skapa möjligheter i en vanlig klass?

### *Komprimera kursen*

En av de enklaste åtgärden är att göra det möjligt för duktiga elever att lägga mindre tid på de traditionella uppgifterna. Gör i början av ett avsnitt ett diagnostiskt test på det som skall gås igenom. Gå igenom resultatet av testet och gör en bedömning av vad eleverna redan behärskar, vad de kan lära sig efter lite instruktion och vad de verkar obekanta med. Låt dem slippa undervisningen inom de delar de redan behärskar. De kommer att lära sig väldigt lite på att se eller öva på dessa delar igen. Förse dem istället med alternativa uppgifter som vidgar eller fördjupar deras förståelse inom det avsnitt ni behandlar.

Gå igenom de områden där de bara behöver mindre justeringar medan resten av klassen ägnar sig åt inledande uppgifter. Ge dem sedan uppgifter där de kan utvidga och använda sina kunskaper, medan du ägnar tid åt de andra i klassen. Följ upp dessa första uppgifter med ytterligare uppgifter som är avsedda att fördjupa och utveckla deras förståelse.

När det gäller begrepp och processer de är obekanta med deltar de i den ordinarie undervisningen.

### *Alternativa uppgifter*

Med lite kreativitet från lärarens sida kan de flesta uppgifter utvidgas så att de ger tillräcklig stimulans och utmaning för avancerade elever. Det kan räcka med att öka komplexitet på siffrorna i uppgiften. Om man behandlar grundläggande multiplikation kan elever som redan behärskar det istället gå igenom kvadrater på tal, leta efter mönster och lära sig kvadraterna på alla tal från 11 till 25. När den ordinarie undervisningen handlar om positionssystemet, kan de begåvade eleverna få i uppgift att undersöka tal i basen 5 eller 8. När den ordinarie undervisningen handlar om plangeometri kan de läsa ”Flatland” ( på svenska Plattlandet, en bok av E.A. Abbott) eller prova taxigeometri. De kan också jobba med tre dimensioner eller undersöka vad som händer när man låter en tvådimensionell figur, t ex en triangel, rotera runt någon av sina sidor.

Förutom en utökning av den ordinarie kursen kan alternativa uppgifter t ex handla om att studera historien kring de matematiska begrepp som tas upp i kursen. Grundskoleelever kan lära sig om gamla sätt att räkna, eller uppskattningar av värdet på Pi genom olika århundraden. De kan läsa om kända matematiker, eller likt grekerna träna på att hantera aritmetik och algebra geometriskt istället för numeriskt. Figurtal är exempel på sådant som kunde ingå i sådana lektioner. Det finns många intressanta områden i matematiken som vanligen utelämnas i undervisningen och som är användbara som ersättning för sådant som eleverna redan behärskar. Exempel på detta är logikpussel, sanning och lögn-problem, nätverk, matematisk logik, spelanalys, palindromtal, topologi, koder och magiska kvadrater.

### *Öppna och omvända frågor*

Begåvade elever kan enkelt få utmaningar genom att man låter dem utforska okända områden. Yngre elever kan snabbt upptäcka de negativa talen genom en övning med miniräknare där de successivt subtraherar ett tal från ett givet starttal. Till exempel:

Börja med 20 och ta bort 3, om och om igen. Resultatet blir 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1,-4 etc. När de en gång upptäckt de negativa talen så låt dem leka med dem och se vilka egenskaper och samband de kan hitta. Andra exempel på öppna frågor är:

- *På hur många sätt kan du uttrycka talet 10?*
- *Hur många tal kan du uttrycka med fyra fyror och vilka matematiska symboler eller operationer du vill?*

När eleverna ska räkna på sannolikheter att få vissa nummer med en vanlig kubformad tärning så kan de begåvade eleverna hitta samma sannolikheter med en tärning i form av en tetraeder eller någon annan ovanlig form. Om den traditionella frågan är att hitta summan av två bråk, be dem då att skriva berättelser som utgår från det lösta problemet. Låt dem, som i antikens Egypten, fundera ut sätt att uttrycka bråk som summan av stambråk.

Omvända frågor är enkla att åstadkomma. Omvända frågor är sådana där man ger eleverna svaret och ber dem komma med frågorna. Om klassen håller på att lära sig att addera decimaler och jobbar med problem som 0,7 + 0,8 kan uppgiften vara att hitta fler additioner som ger lösningen 1,5 eller att visa med bilder att 0,7 + 0,8 inte blir 0,15. Om eleverna jobbar med ekvationer som $x + 5 = 20$, kan uppgiften vara att finna så många ekvationer som möjligt där svaret blir 15.

### *Vad händer om?-frågor*

”Vad händer om-frågor” dyker ofta upp i matematiska situationer från eleverna själva. Dessa frågor ger ofta utmärkta möjligheter för begåvade elever att utforska riktiga matematiska problem. Till exempel: vad skulle hända om multiplikationstangenten på miniräknaren inte fungerade. Hur skulle du lösa problemet 14 x 25?

Palindromtal ger ypperliga tillfällen till ”vad händer om-frågor”. Palindrom är likadana oavsett om man läser framifrån eller bakifrån, tex 454, 1234321, *Anna* och *Ni talar bra latin.* Alla tvåsiffriga tal kan göras till palindrom genom en tvåstegsprocess där man vänder på siffrorna och sedan adderar och sedan upprepar processen så många gånger som nödvändigt. 35 blir ett palindrom genom att vi först vänder på siffrorna och sen addera en gång. 35 + 53 = 88. Det kallas ett enstegspalindrom eftersom palindromet uppträder efter bara en omgång. Titta också på 48. Efter en vändning får vi 48 + 84 = 132 vilket inte är ett palindrom. Efter andra vändningen har vi 132 + 231= 363, vilket är ett palindrom. Således är 48 ett tvåstegspalindrom.

- *Vad händer om du adderar ett enstegspalindrom med ett annat enstegspalindrom?*
- *Finns det något sätt som du kan förutse hur många steg det tar innan ett tal blir ett palindrom?*
- *Vad händer om du successivt subtraherar tal och deras reversibler istället för att addera dem som ovan?*
- *Vad händer om du multiplicerar ett tal med dess reversibel?*

”Vad händer om-frågor” leder ofta elever till att upptäcka mer avancerad matematik, vilket definitivt är lämpligt för begåvade elever. Som lärare behöver man bara hålla reda på vilka ”vad händer om-frågor” som dyker upp med åren. Dessa kan sedan utgöra startpunkt för många utmärka undersökningar.

Slutligen finns det anledning att också fundera på en speciell oro som kan finnas hos lärare: ”Vad händer om en begåvad elev ställer en hypotes som läraren inte förstår eller har kunskap om?” Det är min övertygelse att man, snarare än att uppfatta detta som ett problem, bör välkomna det som en möjlighet att illustrera att matematik inte alltid är något som man fått till sig av en expert. Kom ihåg att det inte är fel att säga ”jag vet inte” till eleverna. Faktum är att det är värdefullt för eleverna att se att läraren inte alltid kan svaret. Ibland behöver klass och lärare samarbeta för att hitta svaret.

## Resurser

I arbetet med begåvade elever kan man använda matematikhistorier, biografier, pussel, problemlösningsböcker och rekreationsmatematikböcker. Leta särskilt efter böcker av Martin Gardner, Raymond Smullyan, Marilyn Burns, Jack Bottermans, och Dr. Crypton. Det bör också finnas ett bra matematiklexikon i klassrummet. Det finns också utmärkta artiklar om matematiker. Några intressanta historier finns om Ramanujan, James Sids (ett underbarn), Hypatia, Gauss, Galois och Aristoteles, bland andra. Glöm inte att använda Internet för att hjälpa dina elever att utforska matematikhistoria och biografier.

Slutligen finns det många spel, pussel och tidningar som kan ge ytterligare utmaningar. Exempel på sådana är Mastermind, Othello, Black Box, Mind Tra, Set, 24, Crypto, Pente, Solitaire, Sänka skepp, Soma pussel, burr pussel, Snafox, peg och pussel med glidande block. Det finns mängder med bra materiel att använda sig av.

Den här artikeln har försökt uttrycka att det finns ett behov av att differentiera undervisningen av begåvade barn. Dessa elever behöver utmaningar och de måste få chansen att utforska matematiken på ett sätt så att den bibehåller sin skönhet och mystik. Om man bara ger dem samma som resten av klassen så kommer de aldrig att upptäcka sin fulla kapacitet. Det är lika viktigt med rätt kursinnehåll och undervisning för begåvade som för genomsnittseleverna och för de elever som måste kämpa med matematiken.

### REFERENSER


Barger, R. (1998). *Math for the Gifted Child.* Jefferson City, MO: Gifted Association of Missouri.

Bunce, N. & Hunt, J. (2000). *Ramanujan. The Science Corner.* *http://www.physics.uoguelph.ca/summer/scor/articles/scor189.htm*.

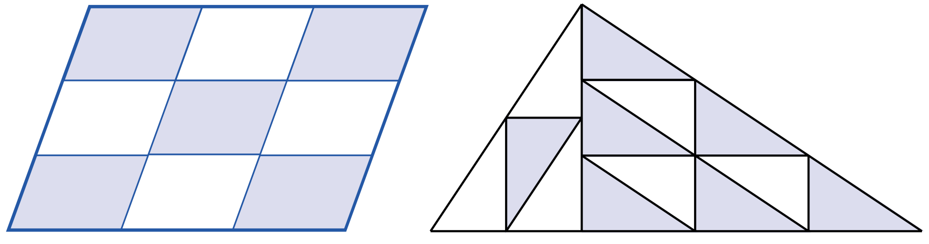
Devlin, K. (1994, Spring). *Fermat's last theorem*. Math Horizons, 4-5.

Eddins, S. & House, P. (1994). *Flexible pathways: Guiding the development of talented students.* In C. A. Thornton & N. S. Bley (Eds.), Windows of Opportunity (pp. 309-322). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Van de Walle, J. (1994). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* New York: Longman, Inc.


Översättning och bearbetning:
Claes Johansson och redaktionen

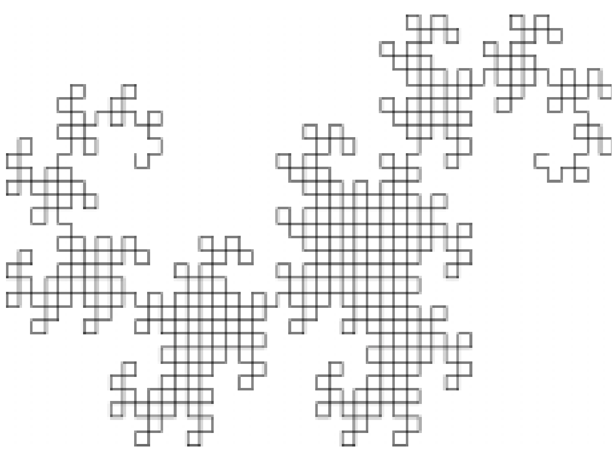


*Rep-Tiles eller Replicating Tiles är mosaikbitar som kan bilda större kopior av sig själva då de fogas samman. Termen "rep-tile" myntades av matematikern Solomon Golomb, en framstående gestalt vad gäller spännande geometriaktiviteter av alla slag. Figurerna visar två varianter på självkopierande mosaikbitar. Mer om rep-tiles kan du finna på: http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/reptile1.htm*

## Förslag på arbetsområden

Här ges en lista över aktiviteter. Naturligtvis kan de vara intressanta och utvecklande för alla elever.

*Abacus – historiskt och för beräkningar*
*Äldre algoritmer, t ex matrismultiplikation*
*Anamorphisk konst och matematik*
*Berömda matematiker*
*Binära tal*
*Binär analys av spel*
*Dim*
*Diofantiska ekvationer*
*Dragon Curve, se illustration*
*Escherpussel och bilder*
*Fibonaccital*
*Figurativa tal*
*Flexagoner*
*Fraktaler*
*Fyrfärgsproblemet*
*Geometriska vanishes*
*Glidpussel, t ex 15-pussel eller med bilder*
*Goldbachs förmodan*
*Grafteori*
*Det gyllene snittet*
*Hamiltonska stigar*
*Humor i matematiken*
*Isbjörnsproblem*
*Josefs-problem*
*Kinesiska restsystem*
*Knutteori*
*Koder och kryptering*
*Korttrix*
*Korsa floden- problem*
*Kryptaritmer med meningsfulla budskap*
*Logik*
*Lucastal*
*Lögn eller sanning-problem*
*Magiska kvadrater*
*Matematik i litteraturen*
*Matematik i naturen*
*Modulo- matematik*
*Möbiusband*
*Nätverk*
*Nim*
*Origami*
*Palindrom*
*Pappersklippning och vikning*
*Paradoxer*
*Paritet*
*Pascals triangel*
*Solitaire*
*Synvillor*
*Sällsamma tal*
*Pentominos*
*Pi*
*Plattlandet*
*Primtal*
*Rep-Tiles*
*Romerska siffror*
*Olika räknehjälpmedel*
*Oändligheten*
*Talföljder*
*Tangram*
*Tessellering*
*Topologi*
*Träknutar*
*Vänskapliga tal*



*Detta är en så kallad Dragon Curve. Med hjälp av några enkla konstruktionsregler uppstår denna typ av kurvor efter ett antal upprepningar, här tionde "generationen" efter starten. Som gränsform uppstår en fraktal kallad Harter-Heighwaydraken. Mer om drakkurvor kan du finna på:*

*http://www.math.okstate.edu/math-dept/dynamics/lecnotes/node17.html*