Jöran Petersson

Små barn – stor matematik

Många nyfikna frågor som barn och unga elever ställer har en gång gjort stora filosofer och matematiker kända. Här ger författaren exempel på historisk bakgrund till några vanliga frågor om matematik.

Denna artikel beskriver hur elever i tidiga skolåldrar ibland ställer precis samma frågor, som de som har gjort några av historiens matematiker kända inom exempelvis aritmetik, geometri och sannolikhetslära. Ibland sker dialogen på elevernas direkta initiativ och ibland hinner läraren före. Frågor av denna typ erbjuder läraren möjligheten att ge matematiskt erkännande och bekräftelse åt elevers tankar och samtidigt precisera begreppsuppfattningen från vardagskontext till skolkontext.

Hur stora tal finns det?

Fall 1: En före detta elev beskriver en händelse i åk 4 eller 5 där läraren frågar om det finns något största tal. Eleven hade nyss hört ett radioprogram där ”centiljard” beskrevs som det största räkneordet i serien miljon-miljard (sv.wikipedia.org/wiki/Namn_på_stora_tal). Därför uppfattade eleven det som att läraren frågade efter det största kända räkneordet och svarade ”centiljard” varefter läraren hade sagt att man alltid kan addera 1 och att det alltså inte finns något största tal. Eleven minns sin reaktion på lärarens svar som att ”det är väl självklart att det alltid går att addera 1 hur länge som helst och därför inte intressant att fråga om”.

Fall 2: I sin bok *Thinking as communicating* ger Anna Sfard ett exempel på ett samtal med en elev i tidiga skolår. Intervjuaren i hennes bok bygger sina frågor på att addera talet 1 till varje tal som eleven föreslår. Matematiskt sett motsvarar det att använda ett axiom i Peanos axiomsystem för de naturliga talen, nämligen att efter varje naturligt tal kommer ett annat naturligt tal. Samtalet går ungefär så här:

Intervjuare:	Vilket är det största tal du kan tänka på?
Elev:	1 miljon.
Intervjuare:	Vad händer om vi adderar 1 till 1 miljon?
Elev:	1 miljon och 1.
Intervjuare:	Är det större än 1 miljon?
Elev:	Ja.
Intervjuare:	Vilket är det största tal du kan tänka på?
Elev:	2 miljoner.
Intervjuare:	Vad händer om vi adderar 1 till 2 miljoner?
Elev:	Det blir mer än 2 miljoner.

Intervjuare:	Antag att talet googol är det största tal vi känner till. Kan vi addera 1?
Elev:	Ja. Det finns tal större än googol.
Intervjuare:	Finns det något största tal?
Elev:	Nej, det gör det inte.

De båda fallen visar att det finns åtminstone två möjliga tolkningar av frågan om ett största tal. I fall 1 förefaller eleven, redan innan läraren frågar, vara bekant med att det finns oändligt antal tal och tolkar därför frågan som att läraren frågar efter det största räkneordet medan eleven i det andra fallet ger intrycket av att under intervjuns gång lära sig att oavsett hur långt man har kommit i talramsan, så går det alltid att fortsätta. Dock kan man väl påstå att eleven i fall 1 underskattar hur stor matematik denna fråga rymmer, eftersom lärarens återkoppling bygger på axiomet ”varje naturligt tal har en efterföljare” som är en del i Peanos axiomsystem för naturliga tal.

Historisk bakgrund

Matematikern Gottlob Frege ställde ungefär följande fråga vid 1800-talets slut:

> Hur vet vi att 1 miljard + 1 miljard = 2 miljarder? Ingen har ju räknat efter och kontrollerat!

Det som Frege menade med denna fråga var att vi inte kan förlita oss på att experimentellt verifiera vad summan $a + b$ blir, åtminstone inte för stora tal. Vi behöver istället förlita oss på logik för detta, alltså abstrakt tänkande. Det var detta problem som Giuseppe Peano löste med sitt axiomsystem om de naturliga talen. Något förkortat säger detta axiomsystem att det (1) finns ett minsta naturligt tal och att (2) efter varje naturligt tal kommer ett nytt naturligt tal. I aritmetisk klartext betyder detta att vi alltid kan addera talet 1. Ytterligare en historisk not är att i Euklides *Elementa* var talet 2 det första (naturliga) talet medan Nichomakhos av Gerasa ungefär år 100 e Kr inkluderade talet 1 bland de naturliga talen och John Wallis föreslog 1657 att även talet 0 är naturligt, allt enligt *Matematiktermer för skolan*.

Kombinatorik i tidiga år

Lyn D English beskriver i artikeln *Young children's combinatoric strategies* hur barn i åldrarna 5–11 år löste följande kombinatoriska problem:

> Med hur många färgkombinationer kan klippdockor i form av nallar kläs i tröja (2 färger) och byxa (3 färger)?

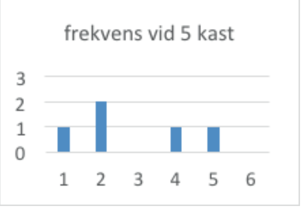
Problemet utökas sedan stegvis med fler färger på kläderna och även antal knappar i tröjan. English kategoriserade elevernas lösningsstrategier i olika nivåer.

Nivå	Lösningsstrategier
Asystematisk	Slumpmässigt val av kombinationer utan att ta hänsyn till tidigare val, dvs dubbletter kan förekomma.
Presystematisk	Som ovan, men sorterar ut dubbletter.
Begynnande systematisk	Ett mönster skönjs i valet av kombinationer. Sorterar ut dubbletter.
Uttalat systematisk	Cyklisk och fullständig sökning i valet av kombinationer. Sorterar ut dubbletter.

Resultatet av undersökningen var att redan i 7-årsåldern hade några elever uttalade systematiska strategier, vilket forskaren kommenterade med att Piagets idé om åldersordnade stadier inte gäller. Istället är det individer med stor spridning i kompetens inom varje åldersgrupp. I alla åldrar fanns strategier på hela skalan från slumpmässiga val till systematiskt sökning, men slumpmässigt prövande dominerade förstås i yngre åldrar och systematisk sökning i senare åldrar.

Historisk bakgrund

Det är värt att notera att kombinatorik saknades i Lgr 62 men fanns med i innehållet för åk 8 i Lgr 69 och nu uttryckligen finns med i målen för åk 4–6 i Lgr 11 och indirekt även i åk 1–3 i form av slumpmässiga händelser. Att spela tärning är en enkel form av slumphändelse. En tärningsspelare ställde frågor om just detta till Pascal som i brevkorrespondens med Fermat löste detta problem. Som lärare kan vi i efterhand konstatera att till synes enkla frågor om kombinatorik ledde till stor matematik. Ett sammanhang, bekant för barn, skulle kunna vara om ettor eller sexor är vanligare tärningsutfall än exempelvis fyror. Här kommer man även in på stora talens lag, som först formulerades av Bernoulli i början av 1700-talet, nämligen att denna fråga absolut inte går att avgöra med ett tärningskast och troligen inte ens med 50, men kanske med 200 kast och hela klassens kan hjälpas åt att samla in data för att undersöka detta. Diagrammen visar att vid få kast är staplarna olika höga med vid många kast är de hyfsat jämnhöga.



Ett annat exempel kan vara att i vanliga tärningsspel använda två olikfärgade tärningar i stället för en tärning. Två olika färger på tärningarna behövs för att tydligt synliggöra att 1 + 4 och 4 + 1 inte är ett utan faktiskt två olika fall. Utan att gå in på tal i bråkform, kan elever och lärare empiriskt i ett frekvensdiagram undersöka vilken av tärningssummorna 7 och exempelvis 5 som är vanligast. På köpet får eleverna mycket övning i aritmetik. Det går också att härleda detta genom att visa att summan 7 med två tärningar kan skrivas som talkamrater på sex olika sätt medan summan 5 endast har fyra talkamrater. Detta förutsätter dock att eleverna åtminstone empiriskt har sett hur stora talens lag fungerar och accepterat att den går att tillämpa i detta fall.

Finns det cirklar i verkligheten?

Fall 3: Här är en dialog mellan en tioåring och en förälder.

Tioåringen:	Finns det några cirklar i verkligheten?
Föräldern:	Hur då menar du?
Tioåringen:	Jo, kan man verkligen göra en exakt cirkel av atomer? Kan man rita en linje med atomer så att den bara har längd men inte bredd?

Historisk bakgrund

Tioåringens fråga är av samma typ som gjort flera tänkare till världshistoriens giganter. Demokritos föreslog 400 f Kr att det finns ändligt små odelbara (på grekiska atomos) materiepartiklar även om det blev empiriskt erkänt först genom kemisten Berzelius (noggrannheten i John Daltons experiment räckte främst till filosofiska argument för atomteorin). Euklides, ca 300 f Kr, definierade att linjer och cirklar inte har någon tjocklek, precis som tioåringen anade. Alltså finns linjer och cirklar bara i fantasin. De linjer vi ritar har ju faktiskt bredd och tjocklek, annars kunde vi ju inte se dem ens med ett aldrig så bra mikroskop. Detta är typiskt för matematiken. Matematikdidaktikern Anna Sfard och många med henne understryker att matematiska begrepp endast är åtkomliga via sina representationer, till skillnad från exempelvis naturvetenskap där flera begrepp faktiskt kan upplevas direkt med våra sinnen såsom exempelvis längd, temperatur och tyngd.

Hopningspunkter

Fall 4: En förälder till en nioåring återberättade följande dialog.

Nioåring: Pappa, vad är $0{,}33 \cdot 3$?

Förälder: Jag är lite sömnig just nu, men du klarar nog att räkna ut det själv.

Nioåring: (tankepaus) … 0,99.

Förälder: Javisst är det det!

Nioåring: (tankepaus) Pappa, vad är $0{,}333 \cdot 3$?

Förälder: Du klarade så bra att räkna ut $0{,}33 \cdot 3$ så du klarar nog detta också.

Nioåring: (tankepaus) … 0,999.

Förälder: Det stämmer. Du är skicklig på huvudräkning.

Dialogen fortsätter en vända till med fyra decimaler.

Nioåring: (kort tankepaus) … men då kan man ju ta med hur många decimaler som helst och det blir fortfarande 0,9999 och inte 1.

Förälder: Hur då menar du?

Nioåring: Jo, om $1/3 = 0{,}333$ och så vidare så blir $3 \cdot 1/3 = 0{,}999$ och så vidare, men inte 1. Det fattas ju lite hur många decimaler man än tar med.

Fall 5: I rapporten *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling* beskrev Inger Wistedt och Mats Martinsson elevers arbete i åk 5 med ett matematiskt problem, där eleverna landade i ett resonemang i stort sett identiskt med fall 4.

Historisk bakgrund

Denna fråga dokumenterades redan i antikens Grekland som Zenons paradox om Akilles och sköldpaddan. Akilles var känd som en mycket snabb löpare och Zenon framställer sin paradox på ett tämligen barnvänligt sätt. Cauchy (1800-talet) blev känd för att besvara frågor liknande den ifall likheterna $3 \cdot 0{,}33333\ldots = 0{,}9999\ldots = 1$ gäller och han gjorde det på följande sätt. Vi ser att talföljden 0,9; 0,99; 0,999 etc hopar sig vid exakt talet 1. Cauchy kallade detta för en hopningspunkt och definierade helt enkelt denna typ av talföljd – där varje nytt tal kommer allt närmre hopningspunkten – genom sin hopningspunkt, alltså talet 1, dvs att likheten 0,999… = 1 faktiskt gäller. Nu konvergerar faktiskt inte alla talföljder med hopningpunkter. Ett enkelt exempel är talföljden -1, +1, -1, +1, … som ju har två hopningspunkter (+1 och -1) och inte heller den hoppande talföljden 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, … med endast hopningspunkten 1. Vi kan alltså dra slutsatsen att vi måste ställa vissa krav på hur talföljden hopar sig och exemplen ovan fungerar för elever i tidiga skolår medan den högre matematiken använder det som skämtsamt ibland kallas ”epsilon-delta-gymnastik”.

Perspektiv på små barns frågor om stor matematik

Exemplen ovan är ett urval som representerar aritmetik, sannolikhetslära och geometri. De illustrerar att barns stora matematik inte begränsar sig till något särskilt område. Ett enskilt barns frågor om stor matematik kan vara tecken på särskild fallenhet, men det kan lika gärna handla om alla barns stora fallenhet för att ställa varför-frågor.

Forskning om barns matematiska förmågor kan bedrivas på flera sätt, vilket en artikel av Fenna van Nes och Jan de Lange ger exempel på. På senare år har studier med datortomografi visat att samma delar av hjärnan som vuxna använder för aritmetik aktiveras när spädbarn ser ett antal prickar som fördubblas eller halveras till antalet. Hjärnstrukturerna för antalsuppfattning finns alltså färdiga och fungerande redan hos spädbarn. Därmed inte sagt att ettåringar förstår vad vi menar med siffror även om de ickespråkligt kan skilja mellan få/lite och många/mycket. Just detta med språk är faktiskt en utmaning för forskarna då undersökningar med ”den kliniska forskningsintervjun” som metod ställer tämligen omfattande krav på barnens språkliga förmåga. Därför är det särskilt viktigt att också observera vad den intervjuade (utan ord) gör, eftersom det för såväl yngre barn som för andraspråkare och tysta barn mycket väl kan gälla att något är lättare gjort än sagt. Även för oss vuxna kan det ju vara mycket lättare att visa hur man slår en råbandsknop än att beskriva det i ord.

LITTERATUR

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics* 22(5) s 451–474.

Kiselman, C. O. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Wistedt, I. & Martinsson, M. (1994). *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling*. Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

van Nes, F. & de Lange, J. (2007). Mathematics Education and Neurosciences: Relating Spatial Structures to the Development of Spatial Sense and Number Sense. *The Mathematics Enthusiast* 4(2). scholarworks.umt.edu/tme/vol4/iss2/7