Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Förhållanden, sammansatta enheter och proportionella resonemang

Denna artikel sammanfattar trösklar i elevers utveckling av proportionella resonemang. Tre tidigare artiklar finns i Nämnaren 2017, nummer 2–4. I denna fjärde artikel ges några definitioner och bland annat besvaras frågan varför det är viktigt att undervisa om proportionella samband.

Om elever har kunskap om förhållanden, sammansatta enheter och proportionella resonemang, vad finns då kvar att förstå av grundskolans matematik? Nog finns det en del kvar, men när vi analyserade ett nationellt prov från årskurs 9 så kunde 70 % av uppgifterna lösas med hjälp av förståelse för förhållanden och olika typer av proportionella resonemang. Det visar att det är väl spenderad tid att lärarer har en idé om hur elevernas förståelse för proportionella resonemang ska stödjas och utvecklas under skolåren.

Vi har beskrivit proportionella resonemang i tre tidigare artiklar: *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar om vi hjälps åt? Varför är det så svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat?* och *Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?* Men vad är egentligen proportionella resonemang och är det verkligen så att de här resonemangen är avgörande för elevernas möjligheter att arbeta effektivt med matematik?

Dags för definitioner

Det är nu på sin plats att vi reder ut vad vi menar med förhållanden, sammansatta enheter, proportioner och proportionella resonemang.

Förhållande

Ett förhållande [eng ratio] är resultatet av en multiplikativ jämförelse mellan två kvantiteter. Exempel på berömda förhållanden med egna namn är till exempel π, som beskriver relationen mellan omkretsen och diametern på alla cirklar i planet; sinus, cosinus och tangens som beskriver relationerna mellan sidorna i rätvinkliga trianglar för olika vinklar och det gyllene snittet. När man bestämmer sig för att definiera förhållande så här, har man inte angivit hur förhållandet ska uttryckas. I alla fallen ovan är uttrycksformen en kvot. Det är t ex kvoten O/d som betecknas med π. När vi blandar saft är det istället vanligt att ett förhållande där 3 delar saft ska spädas med 8 delar vatten uttrycks som 3:8.

I saftexemplet är det två olika slags delar av en helhet vätska som relateras till varandra. Det är ett så kallat *del:del-förhållande*. Del/helhet-förhållanden kallar vi i den svenska skolmatematiken vanligen för bråk. Vi delar till exempel upp något i 5 lika delar och 2/5 betecknar 2 sådana delar av helheten. Terminologiskt kan bråk närmast jämföras med engelskans 'fraction' med den väsentliga skillnaden att 'fraction' också används för uttryck där täljare och nämnare inte nödvändigtvis är heltal. Att täljare och nämnare måste vara heltal, med nämnaren skild från noll, känner vi igen från definitionen av rationella tal.

Nu är det rimligt att fråga sig varför vi har en svensk definition av bråk som helt överensstämmer med definitionen av rationella tal. Varför inte bara kalla det rationella tal? Vi har inget svar på detta, men vi är intresserade av att gå till botten med det. Därför hoppas vi att du som läser detta inte tvekar att dela med dig om du sitter inne på intressant information. Det skulle vara önskvärt att enklare kunna skilja på de fall när vi är intresserade av att veta att det är ett rationellt tal vi pratar om och på de fall när det intressanta är själva bråkformen, dvs ett uttryck skrivet som en kvot. Mer om förhållanden finns att läsa i artikeln *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar när vi hjälps åt?* Där reder vi också ut varför det är viktigt att eleverna kan skilja på del:del-förhållanden och del/helhet-bråk.

Sammansatt enhet

En sammansatt enhet [eng rate] är ett förhållande där två enheter som mäter olika kvantiteter kombineras till en ny enhet som exempelvis hastighet, kilopris och densitet. Sammansatta enheter är ur konceptuell synpunkt särskilt besvärliga eftersom den redan fastställda relationen mellan två enheter gör det intrikat att relatera den till en annan situation med samma sammansatta enhet. Detta beskriver vi i *Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?*

När vi tänker på en genomsnittlig hastighet, tänker vi att för en viss given tidsenhet förflyttar sig något en viss sträcka. Medelhastigheten är ett mått på hur lång denna sträcka blir för en given tid. Den multiplikativa relationen säger oss att med en given medelhastighet kommer vi dubbelt så långt om vi åker dubbelt så länge eller att en given sträcka tillryggaläggs på halva tiden om hastigheten fördubblas. Så långt är allt enkelt, men som vi beskriver i *Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?* finns också komplikationer. Om du först åker 5 km och sedan 15 km så har du åkt 20 km, dvs summan av delsträckorna. Och om du först åker i 0,5 timme och sedan i 3 timmar så har du totalt åkt i 3,5 timmar. Men om du först åker i 10 km/h och sedan i 5 km/h så kan du uppenbarligen inte addera hastigheterna för att få någon slags total hastighet.

Det här är möjligen intuitivt självklart, men det förrädiska är att den sammansatta enheten blir ett tal och vi är vana att kunna operera tämligen fritt med tal. Vi får alltså inte glömma att tal som representerar sammansatta enheter representerar relationen mellan två storheter, fast det bara är ett tal. Vi kan t ex inte beräkna medelhastigheten över två sträckor genom att ta medelvärdet av två medelhastigheter, så som vi diskuterar i *Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?*

Proportion

En proportion [eng proportion] definieras som en likhet mellan två förhållanden $a/b=c/d$. Proportion kan också definieras som en funktion med linjäritetsegenskaperna $f(x+y)=f(x)+f(y)$ och $f(ax)=af(x)$. En funktion, $A(x,y)$, kan också vara linjär i flera variabler, n-linjära funktioner. Till exempel areafunktionen för en rektangel med sidorna x och y är bilinjär (2-linjär) eftersom $A(x,y)=xy$ och det är lätt att kontrollera att den här funktionen är linjär i var och en av variablerna när den andra hålls konstant.

Proportionella resonemang

Proportionella resonemang [eng proportional reasoning] används för att söka en okänd kvantitet i en situation där de övriga tre kvantiteterna är givna i en linjärt multiplikativ relation, en proportion $a/b=c/d$. Denna relation använder vi för att reda ut *Varför är det så svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat?* Relationerna mellan de ingående storheterna i en proportion kan förstås antingen som en skalningssituation eller en funktionssituation. Vad menas nu med detta? Begrunda följande standarduppgift:

> En bil körs 175 km på 3 timmar. Hur långt kommer den på 12 timmar, om den körs i samma hastighet?

Det här ett typiskt ”saknat värde”-problem. Tre värden är givna och det är elevernas uppgift att beräkna den saknade fjärde kvantiteten. Matematikböckerna kryllar av ”saknat värde”-uppgifter och de finns representerade under alla kapitelrubriker. Den matematiska idé alla uppgifter har gemensamt är att de beskriver en multiplikativ relation mellan två förhållanden: en proportion.

$$\frac{175\ km}{3\ timmar} = \frac{?}{12\ timmar}$$

Vi nämnde ovan att det finns två sätt att resonera proportionellt om proportioner. Om vi utgår från kvoten mellan sträckan 175 km och tiden 3 timmar och konstaterar att samma kvot måste gälla mellan den okända kvantiteten som är markerad med ett frågetecken och 12 timmar. I just den här uppgiften fungerar inte det resonemanget särskilt bra eftersom kvoten mellan 175 och 3 ger talet 58,33333… Ojämnt och fult. Vi kan förstås stanna vid kvoten 175/3 och använda den som multiplikator mellan nämnaren och täljaren i högerledet, men låt oss istället använda det skalningsresonemang som följer av likheten mellan de två förhållandena.

I nämnarna kan vi se att tre timmar är uppskalade till tolv timmar, alltså uppskalade fyra gånger. Eftersom täljarna måste följa samma skalning om likheten ska gälla så är svaret på vår uppgift $4 \cdot 175 = 700$ km. Taadaa, hur effektivt som helst!

Proportionella resonemang används också för att jämföra två förhållanden för att avgöra vilket av dem som är större eller mindre. Om eleverna har kunskap om de multiplikativa relationerna i en proportion behöver de sällan beräkna kvoterna av förhållandena för att kunna jämföra dem. Här följer ett exempel:

Årskurs	Gå till stranden	Gå på bio	Totalt antal barn
Årskurs 5	8	14	22
Årskurs 6	7	6	13

Att gå till stranden är mer populärt bland barnen i årskurs 6 än i årskurs 5.

Sant eller **Falskt** därför att (välj det bästa alternativet):

a) Fler barn i årskurs 5 väljer att gå till stranden.

b) Bara sex barn i årskurs 6 väljer att inte gå till stranden.

c) Färre barn i årskurs 6 väljer stranden, men de är färre i den årskursen.

d) Mer än hälften av barnen i årskurs 6 väljer stranden och mindre än hälften av barnen i årskurs 5 väljer stranden.

Elever som förstår att antalet måste relateras till helheten kommer hävda att påståendet är sant, eftersom mer än hälften av eleverna i årskurs 6 väljer att gå till stranden medan färre än hälften av eleverna i årskurs 5 väljer stranden. De tänker i relation. Elever som hävdar att det är fler barn i årskurs 5 som går till stranden, tänker i absoluta tal och saknar ännu insikt i multiplikativa relationer. Det här är en typisk jämförelseuppgift. Den avslöjar mycket om elevernas tänkande och den kräver proportionella resonemang.

Varför är det så viktigt med proportionella resonemang?

Nu hoppas vi att vi har kastat så mycket ljus över betydelsen av proportionella resonemang så att du som lärare ser dem överallt i ditt undervisningsmaterial. Precis som när man lär sig ett nytt ord, plötsligt dyker det upp i alla möjliga kontexter. Om du dessutom kan få dina elever att känna igen idén när den dyker upp har du gett dem en möjlighet att syntetisera vad de tidigare upplevt som en mängd olika situationer. Vid en första anblick vilar de till synes på helt olika idéer, men plötsligt börjar eleverna känna igen samma idé i många olika situationer. Matematiken krymper och sambanden framträder tydligare.

Blygsam start

Proportionalitet startar blygsamt med fördubbling, halvering och skalning av enkla bråk för att sedan successivt ta allt mer plats i matematiken. Procent, densitet, hastighetsproblem, proportionalitet, likformighet och annan geometrisk skalning, likformig sannolikhet, vektor-rum, de trigonometriska sambanden sinus, cosinus och tangens är bara varianter på samma genomsyrande matematiska idé.

Det är inte bara inom matematiken som proportionella resonemang är en grundläggande idé, även i fysiken är proportionella resonemang helt centrala. Proportionella resonemang är i form av skalning ett gemensamt, sammanbindande grundbegrepp för alla naturvetenskapliga skolämnen. Till exempel spelar relationen mellan begränsningsarea och volym en avgörande roll i många vetenskapliga processer. I kemiska reaktioner där hastigheten beror av förhållandet mellan begränsningsarean och volymen på de ingående substanserna begränsar det den tillgängliga energin. Celltillväxt, osmos och diffusion av syre genom porer i äggskal beror också av förhållandet mellan begränsningsarean på ägget och dess volym. Det är alltså nödvändigt att behärska proportionella resonemang för att förstå och koppla ihop grundläggande begrepp i naturvetenskapen med matematiken.

Allt är inte proportionellt

Det här är den sista artikeln i vår lilla serie om proportionella resonemang. Vi har beskrivit flera olika typfall som alla hanteras med proportionella resonemang, men som på grund av detaljer i uppgifternas formulering ofta leder till fel av för uppgifterna specifika slag. För att eleverna ska bli bättre på att hantera situationer som involverar proportionalitet behöver de känna igen sådana situationer, men också bli bättre på att studera situationernas egenskaper innan de applicerar någon beräkningsmodell. Detta tror vi gäller generellt. Det är bra att specifikt träna på att tolka och beskriva situationerna i olika uppgifter. Är de additiva, multiplikativa, konstanta, linjära, etc? Ett exempel på en konstant situation som ofta felaktigt framkallar proportionella resonemang är:

> Det tar två timmar att torka en tröja på klädstrecket. Hur lång tid tar det att torka två tröjor?

Här är det direkt olämpligt att använda proportionella resonemang och eleverna behöver lära sig känna igen dessa situationer också. Visserligen är proportionella resonemang effektiva, men allt är inte proportionellt.

Att systematisk undervisa om proportionalitet kan alltså både vara bra för att hjälpa eleverna att se likheter mellan olika matematiska områden, men också för att öva på att tolka olika konkreta situationer matematiskt och för att öva sin modelleringskompetens. De matematiska idéerna är huvudsakligen desamma, men den verklighet som modelleras varierar.

Vilka är dina erfarenheter?

Vi hoppas att denna artikelserie har inspirerat till att undervisa om proportionella resonemang. Som alltid är vi intresserade av att får höra om olika erfarenheter. Våra kontaktuppgifter finns som vanligt på sidan 2.

LITTERATUR

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2017). *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar om vi hjälps åt?* Nämnaren 2017:2.

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2017). *Varför är det så svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat?* Nämnaren 2017:3.

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2017). *Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?* Nämnaren 2017:4.