Michael Naylor

Okända skrymslen i Pascals triangel

Pascals triangel, som har varit känd av indiska, persiska, arabiska och kinesiska matematiker i mer än tusen år, fick sitt nuvarande namn i mitten av 1600-talet då den återupptäcktes av den franske matematikern och fysikern Blaise Pascal. Kan triangeln utvidgas till att också rymma negativa rader? Vart leder i så fall det? Följ med författaren på en hisnande resa in i triangelns mer okända skrymslen.

En av matematikhistoriens mest berömda trianglar är Pascals triangel, en triangulär uppställning av tal som är fylld av fascinerande mönster. Triangeln var känd av kinesiska och persiska matematiker långt innan den år 1654 återupptäcktes av Blaise Pascal som, tack vare att han upptäckte och bevisade många av dess egenskaper, också fått ge triangeln dess nuvarande namn. Ännu idag kan matematikstuderande hänföras av att undersöka de mönster som triangeln rymmer – men också många av dess dolda mönster.

Det sätt som vi vanligtvis ser triangeln på är att den har siffran 1 i toppen och längs dess vänstra och högra sidor. Siffrorna inne i triangeln erhålls genom att vi adderar de siffror som finns till vänster och höger i raden ovanför. De första raderna visas i figuren:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

I den nedre raden ser vi att talet 6 är summan av 1 och 5 i raden ovanför, talet 15 är summan av 5 och 10 osv. Mönstret kan på detta sätt utökas i det oändliga.

En värdefull användning av Pascals triangel är att man med dess hjälp kan ta fram binomialkoefficienterna. Den n:te raden i Pascals triangel (där toppraden har radnummer 0) består av de koefficienter vi får då uttrycket $(a+b)^n$ utvecklas. Ett exempel är $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, där koefficienterna 1, 4, 6, 4 och 1, återfinns i den fjärde raden i triangeln.

Ett annat användningsområde där triangeln kan vara till hjälp är för att finna möjliga kombinationer ur en mängd. Term nummer k i den n:te raden (där k=0 är den första termen i en rad), anger antalet möjliga sätt att välja k element från en grupp bestående av sammanlagt n element. Antalet kombinationer, och talen i triangeln, kan vi hitta med hjälp av ekvationen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ytterligare hundratals numeriska mönster är möjliga att hitta i triangeln. Ett mönster som vi kortfattat skall undersöka är det faktum att summan av talen i rad n är lika med 2^n.

En helt ny värld

Dessa mönster och många andra är välkända. Mindre kända däremot är en dold värld i de *negativa raderna* av Pascals triangel, rader som uppenbarar sig om vi utvidgar triangeln *uppåt* i stället för nedåt.

För att åstadkomma denna utvidgning börjar vi med att utöka triangeln åt vänser och höger, samtidigt som vi bibehåller egenskapen att varje tal är summan av talen i raden ovanför. Snart inser vi att dessa tal inte kan vara annat än 0.

0 0 0 **1** 0 0 0
0 0 **1** **1** 0 0
0 0 **1** **2** **1** 0 0
0 **1** **3** **3** **1** 0

Då vi konstruerar rad -1, måste vi försäkra oss om att summan av varje talpar i denna rad är samma som värdet i rad 0. Överraskande visar det sig att det finns flera sätt att göra detta på. T ex genom att placera ½ och ½ ovanför siffran 1 i rad 0, eller 10 och -9, eller varje annat talpar vars summa är 1. Emellertid måste vi, för att bevara mönstret att det första värdet som inte är noll i varje rad är en etta, välja 0 och 1 som de mittersta talen i rad -1.

Så snart värdena 0 och 1 har placerats i rad -1 så följer av detta, med villkoret att summorna i raden under är 0, att raden måste bestå av ett alternerande mönster av talen 1 och -1.

0 0 0 1 -1 1 -1 ...
0 0 0 **1** 0 0 0
0 0 **1** **1** 0 0 0
0 0 **1** **2** **1** 0 0

Nu börjar något mycket märkligt hända. Mysteriet djupnar då vi konstruerar rad -2, och vi finner att det innehåller talen ... 0, 1, -2, 3, -4, 5, ... Fortsätter vi på detta sätt, så framträder en fullständigt dold värld:

1 -6 21 -56 126
1 -5 15 -35 70 -126
1 -4 10 -20 35 -56
1 -3 6 -10 15 -21 28
1 -2 3 -4 5 -6 7
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1
1 0 0 0 0 0 0 0
1 **1** 0 0 0 0 0 0 0
1 **2** **1** 0 0 0 0 0 0
1 3 3 1 0 0 0 0 0 0
1 4 6 4 1 0 0 0 0 0

En ny triangel uppenbarar sig plötsligt! Den kan betraktas som en återspegling av den nedre delen men med alternerande positiva och negativa tal. Den nedre och övre delen av figuren har flera gemensamma egenskaper:

– Första siffran (position 0) i varje rad är en 1:a.

– Den andra siffran (position 1) i rad n är lika med n.

– Den tredje siffran (position 2) i rad n innehåller triangeltalet $\frac{n(n-1)}{2}$.

  Notera att detta uttryck endast ger positiva värden, samt att det är två nollor i sekvensen, då $n=0$ och då $n=1$.

– Den fjärde siffran (position 3) i rad n innehåller pyramidtalet

  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Märk att detta uttryck ger nollor för $n=0$, 1 och 2, och att för $n<0$ är uttrycket negativt.

Om detta mönster utvecklas så upptäcker vi att värdet för ingång i position k i rad n är: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Detta uttryck är i huvudsak detsamma som ekvationen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ men skriven på en form för att undvika problem förknippade med fakultet för negativa tal.

Besynnerliga fenomen

Det är en fängslande övning att undersöka egenskaper hos Pascals triangel i syfte att se om dessa också gäller för de negativa raderna. En fråga man kan ställa sig är om även de negativa raderna tillhandahåller koefficienterna för utvecklingen av uttrycket $(a+b)^n$? Blir summan av elementen också i de negativa raderna 2^n?

En omsorgsfull analys ger rent chockerande svar på dessa frågor! Låt oss titta på binomialutvecklingen av vårt tidigare exempel:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Ge nu akt på vad som händer med exponenterna i det utvecklade uttrycket. Det första vi ser är att exponenten för a successivt minskar med 1 tills det slutligen är 0, och exponenten för b ökar hela tiden med 1 tills det är n.

Hur är det då för $n=-1$? $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}$. Om vi undersöker detta med en divisionsalgoritm får vi följande resultat:

$$\begin{array}{lllll}
1 & : & a+b & & \\
 & & & & \\
\underline{1 + a^{-1}b} & & & & \\
\quad -a^{-1}b & & & & \\
\quad \underline{-a^{-1}b - a^{-2}b^2} & & & & \\
 & a^{-2}b^2 & & & \\
 & \underline{a^{-2}b^2 - a^{-3}b^3} & & & \\
 & & a^{-3}b^3 & & \\
 & & \underline{a^{-3}b^3 - a^{-4}b^4} & & \\
 & & & a^{-4}b^4 \ \ldots &
\end{array}$$

dvs $\frac{1}{a+b} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + a^{-5}b^4 - \ldots$

Och ja, precis som den utökade Pascals triangel förutsäger så är koefficienterna i utvecklingen av uttrycket $(a+b)^{-1}$ lika med 1, -1, 1, -1, 1, …

Tittar vi på problemet ännu noggrannare så händer något mycket märkligt. Om, t ex, $a=b=1$ får vi $(1+1)^{-1}=2^{-1}=½$, men resultatet ovan innebär att $(1+1)^{-1}=1-1+1-1+1-\ldots=½$.

Hur kan detta komma sig?

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), som var en av den matematiska analysens skapare, roade sig med denna serie. Leibniz trodde på mönsters beständighet, idén om att mönster är varaktiga även om de utsätts för konstigheter (som att konstruera negativa rader i Pascals triangel). Han visade att om summan grupperades på följande sätt så får man följande resultat:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0$$

Det kan också grupperas på följande sätt med ett annat resultat:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1$$

Snarare än att skingra denna paradox, resonerade Leibniz som så att eftersom partialsumman av de första n termerna är lika med 1 om n är udda och 0 om n är jämnt, och eftersom sannolikheten för att n skall vara udda eller jämnt är lika stor, så borde den förväntade summan vara ½.

Hur skall vi tolka detta? Skämtade Leibniz? Han argumenterade för sin slutsats ytterligare:

$$S=1-1+1+-1+1+\ldots \quad \Rightarrow \quad S=1-S \quad \Rightarrow \quad 2S=1 \quad \Rightarrow \quad S=½$$

Vidare genom att referera till summan av en geometrisk serie $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots=\dfrac{a}{1-r}$. Termerna $1-1+1-1+1-\ldots$ utgör en geometrisk serie där $a=1$ och $r=-1$. Om vi bortser från att villkoret för konvergens är att $r<1$, är summan $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$.

Slutligen verkar en snabb divisionskontroll bekräfta resultatet:

$$\begin{array}{l}
1 \;:\; 1+1=1-1+1-1+\ldots \\
\underline{1+1} \\
\quad -1 \\
\quad -\underline{1-1} \\
\qquad 1\ldots
\end{array}$$

Allt detta pekar på den oväntade slutsatsen att rad -1 ger binomialkoefficienterna, men också att regeln om summan av den n:te raden är lika med 2^n också gäller för denna rad!

Rad -2 verkar vara än mer gåtfull. Kan den oändliga summan $1-2+3-4+5-\ldots$ möjligen vara lika med 2^{-2} eller ¼? Och är koefficienterna av uttrycket $(a+b)^{-2}$, de som återfinns i denna rad: 1, -2, 3,-4, 5, …? Eftersom $(a+b)^{-2}=\dfrac{1}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}$, så kan vi genomföra polynomdivision och resultatet av denna ger verkligen de förväntade koefficienterna!

Låt oss också betrakta division av det likartade uttrycket $\dfrac{1}{1+2+1}$:

$$\begin{array}{l} 1 \qquad : \qquad 1+2+1 \\ \underline{1+2+1} \\ \quad -2-1 \\ \quad \underline{-2-4-2} \\ \qquad\quad 3+2 \\ \qquad\quad \underline{3+6+3} \\ \qquad\qquad -4-3 \\ \qquad\qquad \underline{-4-8-4} \\ \qquad\qquad\qquad 5+4 \quad \ldots \end{array}$$

På samma sätt får vi talen i rad -3 i Pascals triangel om vi utför lång division av uttrycket $1 \div (1+3+3+1)$. Mer generellt får vi, genom att använda polyomdivision, talen i rad $-n$ genom att beräkna inversen av termernas summor i rad n i Pascals triangel. En underbar överraskning!

Finns det ännu mer?

Vi får alltid vara försiktiga då vi undersöker oändliga mängder om vi vill undvika paradoxer. Kanske har vi behandlat våra oändliga serier och summor lite väl lättsinnigt och lekfullt, men det är helt klart så att Leibniz' tankar om mönsters beständighet är välgrundad. Att följa dessa mönster leder oss ibland till märkliga och spännande världar. Vad finns det mer att upptäcka i de dolda raderna bortom Pascals triangel?

LITTERATUR

Bidwell, J. K. (1973). Pascal's triangle revisited. *Mathematics Teacher*, 448–454. 66(5).

Ewen, B. (1970). Pascal's triangle is upside down. *Mathematics Teacher*, 127. 63(2).

Hilton, P., & Peterson, J. (1991). Euler meets Pascal or some thoughts on progressive pedagogy. *Washington State Mathematics Council Special Edition, Washington Mathematics.*

Rhodes, F. (1971) 1 – 1 + 1 – 1 + ... = ½?" *Mathematical Gazette*, 298-305, June 1971.

Om triangel- och pyramidtal

Bondesen, A. (1983). Från triangeltal till pyramidtal — och kanske vidare. *Nämnaren*, 82–83(4). Tillgänglig på ncm.gu.se/pdf/namnaren/5861_82-83_4.pdf

mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html

mathworld.wolfram.com/PyramidalNumber.html

Om divisionsalgoritmen

www.mattecentrum.se/dokument/polynombeamer2_1.pdf

Artkeln är översatt från engelska av Lars Gustafsson, NCM.