

Vildmarksmatematik

Jeremy Kilpatrick och Thomas Lingefjärd

I en matematikkurs skapad av en grupp matematiklärare vid en amerikansk gymnasieskola, introduceras matematiska begrepp genom realistiska tillämpningar som inbegriper analyser av data och matematiska modeller. Med hjälp av ändringar i den lokala kursplanen, har lärarna ändrat sin undervisning och därigenom lyckats få till stånd en bättre inlärningsmiljö.

Denna artikel är baserad på en föreläsning "Curriculum Change as a Personal Journey" som gavs av J. Kilpatrick i samband med att han blev utsedd till hedersdoktor vid Göteborgs universitet i oktober, 1995.

En noggrant planerad och organiserad kurs i matematik är ibland alltför lik en fjällvandring som aldrig lämnar den markerade leden. Man ser en jämn ström av uppseendeväckande scenarier. Man undviker nog samt alla äventyr, återvändsgränder, hinder och anländer välbehållen kl 5 varje eftermiddag till en vältimrad stuga. Svårighetsnivån är noga kontrollerad och det är lätt att inse att färden kommer att bli lätt och nöjsam. Tyvärr missar man därmed också upplevelsen av att välja en felaktig men spännande väg, få sova i det fria, hitta ett eget spår och insikten i att man kan komma långt på egen hand i vildmarken med intuition och kompass. "Vildmarksmatematik" är en viktig del i en bra utbildning.

Pollak, 1970, p. 329

"Precalculus" (förberedande analys) är den sista matematikkursen man vanligtvis tar i *high school*, om man avser att läsa matematik på universitet. I USA anses calculus fortfarande vara en inledande universitetskurs, även om många gymnasieskolor erbjuder calculus till studenter som går på teoretiska program i årskurs 11 eller 12. Man inriktar sig oftast på att repetera och försöka fördjupa elevers förståelse av rationella, trigonometriska och exponentiella funktioner. Tonvikten är i allmänhet lagd på att transformera algebraiska uttryck och på egenskaper hos funktioner. Kursen strävar efter att ge en grund för studier i reell analys och analytisk geometri. I allmänhet saknas andra tillämpningar än naturvetenskapliga och alla modeller är kontinuerliga, dvs diskret matematik diskuteras inte.

Exemplet på s 24-25 från Barrett m fl (1992) visar hur boken och kursen närmar sig matematiska begrepp utifrån ränteberäkningar. Man inriktar sig på matematiska modeller av fenomen i vår omvärld och tillåter därmed stor användning av numeriska metoder. Eleverna förväntas använda grafritande räknare och datorprogram (företädesvis kalkylprogram) när de löser problemen. Analys av insamlade data är ett av huvudområdena i kursen och elever-

Jeremy Kilpatrick är Regents Professor i Mathematics Education vid University of Georgia, Athens, USA, och gästprofessor i matematikdidaktik vid Göteborgs universitet.

Thomas Lingefjärd är doktorand vid University of Georgia.

na förväntas ofta genomföra egna datainsamlingar. Matrishantering är ett annat huvudområde. Satser och formella bevis saknas helt, vilket är ovanligt för denna typ av kursböcker. Även omfång och utformning är ovanliga för en amerikansk lärobok för precalculus. Boken har 330, mot vanliga 700-800 sidor.

Även om boken skiljer sig från vad man vanligen ser när det gäller utförande och innehåll, är bakgrunden till boken ännu mer ovanlig. Fastän många läroboksförfattare i USA är lärare, inbjuds de vanligtvis av förlag eller andra författare att ingå i ett lag. Denna lärobok, såväl som den kurs från vilken den härrör, utvecklades av en grupp lärare helt utifrån deras egna villkor. De tio författarna ingick i matematik- och datainstitutionen vid North Carolina School of Science and Mathematics.

En amerikansk gymnasieskola

North Carolina School of Science and Mathematics (NCSSM) är en allmän gymnasieskola för såväl flickor som pojkar. Eftersom eleverna kommer från hela North Carolina tillhandahåller skolan också möjligheter till logi för eleverna. Eleverna har det gemensamt att de gjort goda resultat samt visat starkt intresse för studier i framförallt naturvetenskap och matematik. Beslut om att starta skolan fattades av ledande politiker i North Carolina 1978 och den öppnades den 1 september 1980 med 150 elever. Vid slutet av 1994 hade antalet stigit till 550 elever i årskurs 11 och 12. Syftet med skolan är tudelat:

- att utbilda studenter så att de blir framgångsrika i matematik och naturvetenskap,
- att erbjuda fortbildningsprogram till alla lärare i matematik och naturvetenskap i delstaten North Carolina.

Så gott som alla studenter som utexaminerats från skolan har gått vidare till college eller universitet och många av dem har vunnit utmärkelser för arbeten i naturvetenskap eller matematik. Alla elever på skolan läser kursen precalculus.

Kort efter det att skolan öppnat, 1980, började institutionen för matematik och datavetenskap att söka bidrag från såväl privata sponsorer som från överstatliga organ för att kunna köpa datorutrustning samt erbjuda så kallade "summer workshops" för matematiklärare i North Carolina. Lärarna på NCSSM valde sin precalculuskurs som underlag för sommarskolan. Därigenom påbörjades också ett arbete att revidera undervisningsmaterial samt att utveckla nya områden vilket inkluderade utvecklandet av datorprogram avsedda för illustration av matematiska begrepp i kursen. Dessa workshops drog till sig en stor grupp lärare, även många från andra delstater än North Carolina. En anledning till populariteten sägs vara att lärarna som deltog i sommarkurserna föredrog denna typ av fortbildning framför föreläsningar av klassisk typ på något universitet. Här fick de chansen att lära av kollegor. Med hjälp av ansevärda donationer och bidrag lyckades lärarna på NCSSM hyra in extra lärare för att kunna utveckla moduler för de olika delarna av sin precalculus kurs.

Så småningom började lärarna från sommarkurserna och från olika konferenser under övriga skolåret att efterfråga kopior av dessa moduler för det egna klassrummet. Snart efterfrågades en hel lärobok, som skulle innehålla alla framtagna moduler. Det vore enklare att köpa en lärobok istället för ett antal små kompendier med fotokopierade sidor. Lärarna på NCSSM hade inte tänkt skriva en lärobok, men insåg behovet om deras idéer skulle kunna bära frukt bland andra lärare. Boken fick slutligen sex genomgående teman: *matematiska modeller, datorer och miniräknare som verktyg, tillämpningar av funktioner, analys av data, diskret matematik och numeriska metoder.*

Vildmarksmatematik

Medan lärarna på NCSSM utarbetade underlaget för sin kurs, som de kom att kalla *Contemporary Precalculus Through Applications*, bestämde de sig för att utesluta områden de inte kunde motivera. Däribland

fanns kägelsnitt och binomialteoremet. Istället för att fråga sig vilket matematiskt delområde som följde naturligt efter ett annat, bestämde de sig för följande krav:

Om vi inte kan introducera ett begrepp med en tillämpning, tar vi inte upp det.

Många av lärarna hade i början svårigheter med att utesluta delområden de tyckt om att undervisa eleverna i men alla insåg så småningom värdet av detta hårda krav. Den vanliga undervisningssekvensen i en amerikansk skola på denna nivå är *definition-sats-bevis-exempel-övning*. I precalculus kursen på NCSSM, blev sekvensen istället *situation-problem-data-modell-lösning*.

Orienteringen mot tillämpningar kom ursprungligen från Henry Pollak, en mycket känd och respekterad "tillämpad matematiker" i USA. Han har också visat stort intresse för matematikundervisning på olika nivåer. Pollak var en av de ursprungliga medlemmarna i den styrelse som övervakade och stöttade arbetet med NCSSM. Han brukade besöka institutionen för matematik och datavetenskap för att samtala med matematiklärarna om deras arbete. Pollak hade länge argumenterat för att den vanliga matematikkursen i skolan gav eleverna en falsk bild av ämnet, eftersom de aldrig fick hjälpa till att konstruera problem. Metaforen i inledningen av artikeln är ofta citerad.

Naturligtvis finns det andra amerikanska läroböcker från början av 1990 som inkluderar vad författarna kallar "tillämpningar." Den vanliga ansatsen är emellertid att först börja med att undervisa om ett visst matematiskt begrepp och procedurer i anslutning därtill och därefter visa hur det eventuellt kan tillämpas. Tillämpningarna kommer först efter det att eleverna lärt sig den relevanta matematiken. Istället för att introducera ett matematiskt begrepp och därefter kämpa för att hitta en tillämpning, är ansatsen i boken *Contemporary Precalculus* och tillhörande kurs, att börja med ett problem som därefter ger tillfälle att diskutera och lära den matematik som behövs för att lösa problemet i fråga. Då man

frågade en lärare, som använde materialet, om denna ansats svarade han: "Om du känner ett behov av att lära dig något, så gör du det när du måste."

Under arbetet med läroboken, anslöt sig lärarna på NCSSM till filosofin "kvalitén på inläringen är viktigare än att följa kursplanen". De strävade därför efter att koncentrera sig på några få huvudområden, istället för att försöka täcka en lång lista av mål. Tillgången till ny teknologi gjorde att de trodde att en sådan metod var möjlig. Elever skulle förstå de "stora" idéerna i kursen – att tolka mätdata, utveckla matematiska modeller, transformera och använda funktioner. En av lärarna vid NCSSM gav följande kommentar till den matematiska upplevelse de försökte ge sina elever:

Jag brukade anse att det var orättvist av mig att fråga elever om något jag inte undervisat om. Så tycker jag inte längre. Nu ser jag det som om vi alltid hade ett öga i backspegeln. "Kommer ni ihåg hur vi löser denna typ av uppgifter?" Det var en slags matematik från minnet – matematik är att minnas regler. Idag försöker jag fokusera på att matematik är att fundera över problemställningar. Poängen är att svara på en fråga som du inte vet hur man svarar på. Vad gör du när du inte vet vad du skall göra?

En av de mest nydanande idéerna i kursen *Contemporary Precalculus* är den om en "verktygslåda" av elementära funktioner, såsom $\sin x$, $\log x$, och x^2 , vilka används gång på gång under kursen. Avsikten är inte bara att modellera problem utan också att introducera en gradvis tilltagande komplexitet hos funktioner. Eleverna lär sig att transformera "verktygslådans" funktioner för att passa specifika mätdata genom att vända, rotera, utvidga eller trycka ihop dem. De lär sig också att kontrollera transformationen genom att dels förändra funktionens algebraiska form, dels skissa grafen. Som ett resultat av dessa övningar blev funktioner nästan ett fysiskt begrepp, en slags "modell-lera-funktioner" som

gick att vända och vrida på, räta ut och trycka ihop.

Precalculus kursen vid NCSSM har fortsatt att utvecklas sedan boken skrivits. Lärarna har börjat inkludera fler problem där eleverna samlar in egna mätdata eller tolkar givna mätserier genom att använda statistiskprogram, kalkylprogram eller grafritande miniräknare.

Exempel

I en klass som arbetade med myggproblemet nedan använde eleverna en grafisk metod och försökte dela mätdata i två delmängder, vars egenskaper skulle diskriminera mellan de två insekterna. Vissa elever använde en minsta kvadratmetod eller median – medianlinje som gränsdragning.

Andra, som oroade sig för att göra en felaktig klassificering vid användandet av dessa linjer, försökte att använda de mest extrema insekterna i varje grupp för att definiera en linje och därefter använda en "medellinje" mellan de två som skiljelinje. En annan grupp närmade sig problemet genom att söka kvoten mellan antenn- och vinglängd och valde ett medelvärde i in-

tervaller mellan de ej överlappande mängderna av olika kvoter som skiljelinje. Alla grupper diskuterade graden av säkerhet i den klassificering de gjorde.

Elever från NCSSM, med erfarenhet från att lösa problem av denna typ, förefaller ha en annorlunda syn på matematik. Elevlag från skolan har deltagit i nationella matematiktävlingar avseende matematiska modeller och har presterat mycket väl i jämförelse med studenter från Harvard och andra universitet. Deras lärare säger att det inte beror på att eleverna kan mer än studenterna från universitetet, utan på att de vet hur man använder vad man kan.

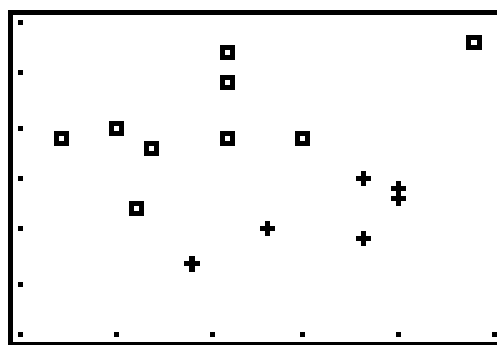


Bild från TI-82

Myggproblemet

År 1981, upptäcktes två nya arter av myggor av biologerna W. L. Grogan och W. W. Wirth i Brasiliens djungler. De gav de två typerna av myggor namnen **Apf** och **Af**. Biologerna upptäckte att Apf myggan bär på ett virus som orsakar att hjärnan svullnar om man blir smittad. Detta kan få fatala följder! Den andra myggan, typ Af, är harmlös och angriper inte människor. För att kunna skilja på de två typerna mätte biologerna de myggor de fångat. De två mätserierna innehöll både ving- och antennlängd hos myggorna.

Af-myggor

Vinglängd (cm)	1,72	1,64	1,74	1,70	1,82	1,82	1,90	1,82	2,08
Antennlängd(cm)	1,24	1,38	1,36	1,40	1,38	1,48	1,38	1,54	1,56

Apf-myggor

Vinglängd (cm)	1,78	1,86	1,96	2,00	2,00	1,96
Antennlängd(cm)	1,14	1,20	1,30	1,26	1,28	1,18

Är det möjligt att skilja en Af-mygga från en Apf-mygga utgående från ving- och antennlängd? Beskriv en metod för att kunna skilja på de två varianterna. Skriv en rapport som beskriver för en biolog hur hon eller han ska göra för att klassificera en infångad mygga.

En förändrad kursplan

Det sätt på vilket kursplanen förändrades i kursen *Contemporary Precalculus* vid NCSSM, är ovanlig på många sätt. Många amerikanska lärare, speciellt de i det allmänna skolväsendet, anser sig inte ha frihet att förändra en kurs med en given kursplan. De flesta matematiklärare i USA anser att de måste följa den lärobok som är utvald för kursen de undervisar i. Vanligtvis förväntar de sig att någon annan skall berätta för dem hur de skall göra.

Lärarna arbetade i en skola vars uppdrag inkluderade fortbildning för andra lärare. Deras skola var ny och de var inte bundna av tradition eller givna statliga mandat. Kursen de valde att reformera hade inte någon helt befäst kursplan. Inte heller fanns det någon nationell, officiell examination på det sätt som finns för calculus. Innehållet i kursen gav goda möjligheter till tillämpningar.

Trots alla dessa fördelar krävdes enorma ansträngningar att utveckla och implementera kursen i skolans program. För att kunna köpa loss lärarna från undervisning behövdes donationer; rutiner för att skriva, mötas och diskutera förändringar samt skriva på nytt behövde utvecklas; datorprogram behövde konstrueras; en ny inriktning mot en ämnesdidaktisk matematik behövde utvecklas. Lärare på andra skolor ansåg den nya kursen svår att undervisa i. Elever vägrade delta i en kurs som inte stämde in i deras bild av hur en matematikkurs skulle se ut. Skeptiska skolpolitiker, administratörer och föräldrar ifrågasatte varför kursen behövde ändras.

Fastän USA inte har en officiell nationell läroplan för skolämnen, så finns det en *de facto* nationell läroplan, delvis för att befolkningen är så rörlig. Föräldrarna vill att barnen enkelt skall kunna byta skola, och universiteten vill ha studenter med ungefär samma bakgrund i fråga om innehåll i kurser. På så sätt skapas ett tryck riktat mot skolan att inte skapa nydanande kurser eller ens ändra innehållet i befintliga kurser i någon större utsträckning. De läroplansguider som produceras av de 50

staterna tenderar att vara kopior av varandra. Skolor tar fram lokala kursplaner som motsvarar innehållet i de mest populära läroböckerna.

Den s k läroplanen, som presenteras i kursplaner och läroböcker, representerar ett urval önskemål från skolauktoriteter och läroboksförfattare om vad elever bör lära sig. Den verkliga läroplanen är emellertid något helt annat, nämligen summan av de erfarenheter som eleven gör i skolan. Den kan aldrig fångas på papper. Intentionerna i en läroplan är mer som en ritning över ett hus än som huset självt. Oavsett om det finns en nationell läroplan och ett nationellt examinationssystem eller ej, så utgör samhällsstrukturen en begränsning för elevens sätt att uppfatta läroplanen. Det finns alltid ett gap mellan officiella uttalanden och praxis:

Centraliserade system är inte så centraliserade och decentraliserade system är inte så decentraliserade, som man vanligtvis tror. Som en fransk skolinspektör en gång anmärkte: 'I Frankrike förväntas varje lärare göra samma sak men det gör de inte och i England, där alla förväntas gå sin egen väg, gör alla samma sak.'

Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981

Trots att många röster höjts för att reformera skolmatematiken i USA under det senaste århundradet kan man argumentera för att det, trots mycken retorik och ytliga förändringar, inte varit någon riktig reform (Kilpatrick & Stanic, 1995). Ropen efter "enhetlig matematik", "den nya matematiken", "problemlösning" och "standards" har inte resulterat i något substantiellt annorlunda kursinnehåll eller annorlunda struktur, annat än marginellt. Ett av de få undantagen är precalculus och det mesta av dess typiska innehåll skiljer sig inte nämnvärt från kursen som var dess föregångare. Kursplanen i matematik för högstadiet och gymnasiet i USA ser ungefär ut som den gjorde vid sekelskiftet. De flesta matematiklärare undervisar om det innehåll och på det sätt de själva lärde sig en

gång. Färre än 10 procent av de som undervisar i matematik i USA tillhör en professionell organisation för matematiklärare (ungefär samma siffror gäller för andra länder), och de flesta lärare är inte professionellt inblandade i kursplanearbete och anstränger sig inte för att ändra läroplanen. Det finns starka krafter för att bevara stabiliteten i skolsystemet vilket gör varaktiga förändringar av kurs- och läroplaner så gott som omöjliga att introducera av skolpolitiker eller fackfolk.

När rymdprogrammet i USA var som mest uppmärksammat i början av 70-talet, började folk undra varför inte utbildningsväsendet kunde utvecklas på ett liknande sätt. "Vi kan skicka folk till månen. Varför kan vi inte lösa problemen inom utbildningen?" Svaret är att det är enbart ett tekniskt problem att placera folk på månen medan det är ett allt annat än tekniskt problem att förbättra skolan, som Irving Kristol (1973) påpekade. Att förbättra utbildning innebär att förändra synsätt och man kan inte förändra människor på samma sätt som man uppdaterar dataprogram eller tar fram en ny flygplansmodell.

Märkbara förändringar av läroplanen såsom den upplevs av elever, i USA eller någon annanstans, kan följaktligen inte genomföras genom att man publicerar nya läroplaner, kursplaner eller läroböcker. Den typen av dokument kan endast stimulera till förändringar.

Verklig förändring av skolans upplevda läroplan uppnås enbart när lärare själva bestämmer sig för att förändra de sätt på vilket de undervisar och vad de undervisar om.

Vildmarksundervisning

Lärarna och lärare på andra skolor, vilka deltog i NCSSMs workshops och konferenser, kunde ändra på dels den kurs de undervisade i, dels det sätt de undervisade på, tack vare det stöd de fick av omgivningen. De stimulerades också av möjligheten att lära sig mer matematik och att experimentera med nya undervisningsformer. En stor del av denna stimulans fanns

i att de undervisade varandra och arbetade tillsammans i ett gemensamt projekt. Lärare vid andra skolor upptäckte att de hade blivit medlemmar i ett landsomfattande nätverk, där medlemmarna ville ändra på sin undervisning.

Som en illustration till hur lärarna engagerade sig i varandras undervisning kan vi berätta om hur de svarade på de svårigheter som vissa elever hade med ränteberäkningsproblemet. I en klass beräknade eleverna resultatet när en dollar investerades till 100 % räntesats om räntan beräknas per år, kvartal, månad, dag, timma och minut. När en elev försökte att beräkna räntan per sekund, fann hon att resultatet minskade istället för att öka, jämfört med beräkning per minut. Hennes lärare var inte säker på varför detta inträffade och kunde bara anta att eleven "förlorat signifikanta siffror" på sin miniräknare. Efter lektionen konsulterade läraren en annan lärare på skolan vilken uppgav att hon upplevt samma problem i sin klass. Även en tredje lärare hade uppmärksammat problemet. Vid lärarnas vanliga tisdagsmöte diskuterades problemet och en lärare berättade om hur en elev undersökt problemet med ett kalkylprogram. Självt hade läraren använt en miniräknare och testat resultatet när man gick från ränteberäkning per minut till en tiondels minut. Hon kunde därigenom bättre följa hur begränsningen hos miniräknaren numeriska kapacitet påverkade resultatet. Som en följd av diskussionen denna tisdag, kunde alla lärarna återvända till sina klasser och förklara hur begränsningar hos miniräknare och datorer kan påverka resultatet.

Matematiklärare har ingen tradition av professionellt utvecklingsarbete där de kan undervisa andra lärare i matematik, bli undervisade av andra lärare, lära och utveckla nya undervisningsformer tillsammans. Lärarna vid NCSSM bröt ny mark och skapade en miljö i vilken inte bara kursplanen och innehållet i kursen utan också det sätt på vilket de undervisade förändrades. Allteftersom de lärde sig att undervisa i "vildmarksmatematik" så att eleverna arbetade med problem vars resultat eller utveckling inte kunde förutses, lärde de sig också att

arbeta som ett lag, att dela med sig av sina idéer och att lära av andra lärare.

I denna miljö uppstod ingen kritik av de lärare på andra skolor som inte vågade ta steget fullt ut mot en så pass äventyrlig pedagogik. Tvärtom uppmuntrades varje lärare som ville delta i projektet att använda dessa idéer så långt som han eller hon ansåg tryggt. De insåg att arbetet med att förändra kursplanen är ett personligt utvecklingsarbete som kräver stöd, uppmuntran och tillfälle till att pröva och förkasta nya undervisningsmetoder. Precis som de arbetade med sina elever, oavsett var de befann sig i sin matematiska utveckling, arbetade de också med sina kollegor oavsett var de befann sig i sin pedagogiska utveckling. De bjöd in andra lärare till att delta i sin process av reflektion och gemensam uppmuntran, men förstod också när vissa av dessa inbjudna lärare valde att gå sin egen väg.

Lärare vid NCSSM upptäckte att en "riktig" förändring av den upplevda kursplanen och därigenom också en utveckling av hur lärare undervisar, ser annorlunda ut från insidan än från utsidan. Det är en osäker och riskabel process som kräver stöd och uppmuntran från de egna kollegorna och omgivningen. Det är en långsam pro-

cess som kräver mycket av var och en som inte följer den vanliga trygga vägen och äventyrar etablerade pedagogiska konventioner i klassrummet och skolan. Processen följer inte de vanliga lagarna för samhällelig ingenjörskonst eller införande av ny policy. Istället tar den över uttryck från samma slags "vildmarksvandring" som dessa lärare ville att eleverna skulle våga pröva i matematiken.

Referenser

- Barrett, G. B., Bartkovich, K. G., Compton, H. L., Davis, S., Doyle, D., Goebel, J. A., Gould, L. D., Graves, J. L., Lutz, J. A., & Teague, D. J. (1992). *Contemporary precalculus through applications: Functions, data analysis and matrices* (Rev. ed.). Dedham, MA: Janson Publications.
- Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kilpatrick, J., & Stanic, G. M. A. (1995). Paths to the present. In I. M. Carl (Ed.), *Prospects for school mathematics* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kristol, I. (1973, January 8). Some second thoughts. *The New York Times*, pp. 55, 62.
- Pollak, H. O. (1970). Applications of mathematics. In E. G. Begle (Ed.), *Mathematics education*. (69th Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part 1, pp. 311-334). Chicago: University of Chicago Press.

Mathematics Handbook for Science and Engineering

BETA

Lennart Råde & Bertil Westergren

This is the third edition of the BETA mathematics handbook.

This handbook covers basic areas of mathematics, numerical analysis, probability and statistics with various applications. The handbook is intended for students and teachers of mathematics, science and engineering and for professionals working in these areas. The aim of the handbook is to provide useful information in a lucid and accessible form, concentrating on definitions, results,

formulas, graphs, figures and tables and emphasising concepts and methods with applications.

The BETA handbook is organised in 19 chapters starting with basic concepts in discrete mathematics, ending with chapters on probability and statistics.

The authors are both on the faculty of the Mathematics Department of Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg, Sweden.

Studentlitteratur, ISBN 91-44-25053-3

Sammanfattning ränta

Man kan beräkna den ränta man får om man sätter in pengar på ett räntebärande konto på olika sätt. Ett sätt är kapitalisering helårsvis, vilket innebär att räntan tillförs kontot vid slutet av året. I dag är det kanske vanligare att tillföra räntan kvartalsvis, månadsvis eller dagligen. En bank som beräknar ränta kvartalsvis, räknar ut och adderar den intjänade räntan till det räntebärande kontot vid slutet av var tredje månad. Vilken effekt har denna mer frekventa kapitalisering på kontots behållning?

Antag att Maria sätter in 1000 kr på en bank som ger 8 % i ränta. Banken beräknar ränta kvartalsvis. Räntan tillförs hennes konto 4 gånger på ett år, men endast en fjärdedel av 8 %, dvs 2 %, används vid varje beräkning. Vid slutet av första kvartalet har Maria på kontot

$$1000 \cdot 1,02 = 1020$$

Vid slutet av det andra kvartalet har Maria

$$1020 \cdot 1,02 = 1000 \cdot 1,02^2 = 1040,40$$

Vid slutet av det första året kommer behållningen att vara

$$1040,40 \cdot 1,02 \cdot 1,02 = 1000 \cdot 1,02^4 = 1082,43$$

Notera att detta är ett något högre belopp än vad motsvarande belopp skulle bli vid årlig kapitalisering, 1080. Vi kan göra jämförelser genom att låta ett kalkylprogram beräkna behållningen efter exempelvis 5 år för olika frekvenser på ränteberäkningarna. Tabell 1 visar resultatet för olika frekvenser av ränteberäkningar och tidsperioder, vid 8% ränta. Värdena i tabell 1 visar tydligt att det spelar en viss roll hur ofta man beräknar ränta.

Övningar

1. Ange ett samband för hur det framtida värdet F beror på en första insättning A_0 , antal år N med kapitalisering kvartalsvis.
2. Ange ett samband enligt ovan, men med räntan beräknad månadsvis.
3. Ange ett generellt samband för hur det framtida värdet F beror på en första insättning A_0 , antal år N och med ränta beräknad k gånger per år.
4. Studera tabell 1 och jämför behållningen på Marias konto för olika frekvenser på ränteberäkningen. Kontrollera gärna värdena i tabellen, utgående från 1000 kronor och 8 % ränta. Alla värden är avrundade till närmaste heltal. Beskriv med ord hur den framtida behållningen förändras när frekvensen på kapitaliseringen ökar.

Ögonblicklig kapitalisering

Studera värdena i tabell 1. Genom att läsa nedåt kolumnvis kan vi se hur behållningen på kontot ökar, när antalet år ökar. Om vi läser radvis ser vi att behållningen ökar när frekvensen på ränteberäkningarna ökar, men ökningen förefaller minska desto tätare ränteberäkningar vi utför. Det verkar som om det finns en övre gräns för ökningen.

I tabell 1 beräknades de olika värdena med hjälp av sambandet

$$\text{Framtida värde: } A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kN}$$

där A_0 representerar den ursprungliga insättningen, r är den ränta man får, k är antalet beräkningsperioder per år, och N är antalet år som räntan beräknas på. I tabell 1 är $A_0 = 1000$ och $r = 0,08$, vilket innebär att följande samband användes:

Tabell 1 Behållning vid olika kapitalisering

År	Kapital år	kvartal	månad	vecka	dag	timme	minut
5	1 469	1 486	1 490	1 491	1 492	1 492	1 492
20	4 661	4 875	4 927	4 947	4 952	4 953	4 953
30	10 063	10 765	10 936	11 003	11 020	11 023	11 023

$$1000\left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^{kN} = 1000\left(\left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^k\right)^N$$

Eftersom antalet år, N , är konstant i varje rad, beror den ökning av beloppet vi kan iakta för ökad frekvens av ränteberäkningar, uteslutande på kvantiteten

$$\left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^k.$$

Vidare, eftersom behållning-

en knuten till ett visst N förefaller vara uppåt begränsad, kan vi sluta oss till att uttrycket måste ha ett gränsvärde när k går mot oändligheten. I tabell 2 ser vi detta uttryck beräknat för större och större värden på k . Gränsvärdet vi talat om förefaller vara lika med 1,083287, avrundat till sex decimaler.

Använd nu en miniräknare för att beräkna värdet av $e^{0,08}$. Genom att jämföra ditt resultat med värdena i tabell 2, bör du se

ett samband mellan $e^{0,08}$ och $\left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^k$

för stora värden på k . Håller detta samband även för andra värdet på r ? Använd gärna din miniräknare för att kontrollera sambandet när $r = 1$. Tabell 3 visar vad

som händer med uttrycket $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ för

några olika värden på k . Använd miniräknaren för att beräkna värdet av e^1 och jämför med värdena i tabell 1. Detta började undersökas av matematiker i början av

1800-talet. Gränsvärdet för $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ då

$k \rightarrow \infty$ är 2,71828,... Talet brukar kallas e , uppkallat efter en matematiker från Schweiz, Leonhard Euler. Med hjälp av matematiska symboler kan vi skriva sambandet så här:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$$

Använd din räknare till att jämföra värden

för $e^{0,10}$ och $\left(1 + \frac{0,10}{k}\right)^k$ där k är ett stort

tal. Upprepa för andra värden på r och övertyga dig om att följande samband är korrekt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r$$

Exponentialfunktionen med basen e , $f(x) = e^x$, är viktig i många sammanhang där en kvantitet växer eller avtar med konstant hastighet. Genom att använda det samband vi funnit, kan vi beräkna resultatet av frekvent ränteberäkning på ett nytt sätt. Om ränta beräknas mycket ofta och förs till kapitalet på det insatta beloppet

1000 kr, kan uttrycket $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^{kN}$

approximeras med $1000 \cdot e^{0,08N}$.

Den matematiska modell vi får genom att använda e , svarar mot kontinuerlig kapitalisering. Namnet antyder vad vi lagt märke till, desto mer frekvent ränteberäkning, desto bättre kommer approximationen att stämma.

Tabell 2

	Kapitalisering						
	År	kvartal	månad	vecka	dag	timme	minut
$\left(1 + \frac{0,08}{k}\right)^k$	1,080000	1,082432	1,083000	1,083220	1,083278	1,083287	1,083287

Tabell 3

k	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$	2,593742	2,704814	2,716924	2,718146	2,718268	2,718280