

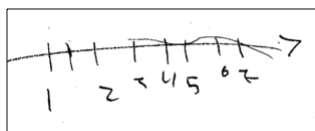
Tallinjen som ett didaktiskt redskap

För att elever ska kunna dra verklig nytta av en tallinje i sitt matematiklärande behöver de få undervisning om hur den kan användas både som en modell av talen och som ett stöd för tänkande och matematiska resonemang.

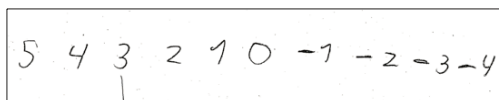
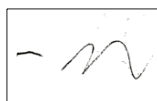
Tallinjen kan ses både som en mental modell av talen och som ett didaktiskt redskap för att utveckla taluppfattning, räknefärdigheter och förmåga att resonera med hjälp av en av matematikens uttrycksformer. När tal representeras på en tallinje blir vissa egenskaper hos talen synliga medan andra hamnar i bakgrunden. Tal som antal eller objekt i en mängd är den helt dominerande bilden av tal hos barn i skolans tidigare år. För att klara av en utvidgning av talområdet från naturliga tal till rationella tal (tal i bråk- och decimalform) och tal med tecken (positiva och negativa tal) behöver eleverna utvidga även sin inre bild av talen. I den här artikeln ska jag beskriva tallinjens egenskaper som *modell av* talen och hur den kan användas som *modell för* tänkande och matematiska resonemang.

Under arbetet med min avhandling *Making sense of negative numbers* upptäckte jag att tallinjen hamnat i skymundan i den svenska skolmatematiken. Tallinjer lyste med sin frånvaro i läromedelsproducenternas kataloger och tallinjer användes inte av eleverna eller läraren i min studie. Lite har detta börjat förändras och vi är förhoppningsvis på väg att ta in tallinjen i skolmatematiken på allvar. I datainsamlingen till min avhandling intervjuade jag elever när de gick i åk 6, 7 och 8 om deras taluppfattning. I slutet av en 30 minuter lång intervju bad jag dem rita en tallinje. På bilderna ser du några exempel på vad eleverna ritade.

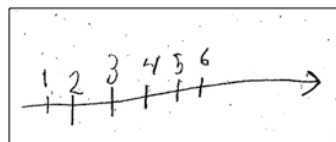
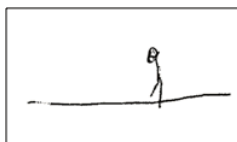
Sean kom inte på något att rita i åk 6 och ritade sedan denna tallinje i åk 7.



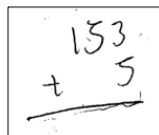
På första bilden från intervjun i åk 6 ritade Freddy ett talstreck som indikerar att någon talar i en dialog. På bilden från åk 7 skriver han en rad med tal i ordning, men i motsatt ordning som en konventionell tallinje.



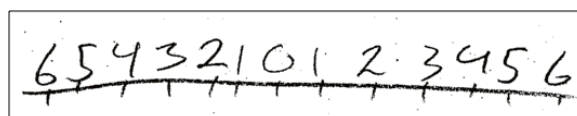
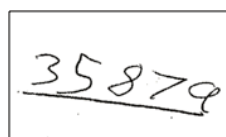
I åk 6 ritar Viktor en gubbe som står på en linje och talar. I åk 7 har det blivit lite mer likt en matematisk tallinje.



Enligt Axel i åk 6 är tallinjen den linje man drar under talen i en uppställning.



I åk 6 ritar Petra en linje med tal på, i åk 7 en symmetrisk tallinje runt 0 men utan tecken på talen.



Det är tydligt att för dessa elever är tallinjen inte ett mentalt redskap som de kan använda för att tänka på och resonera om tal och operationer. Tallinjen är inte ens en *modell av* talen, än mindre en *modell för* tänkandet. I åk 7 hade de flesta elever ritat en matematisk tallinje som på något sätt liknade den konventionella tallinjen och då bad jag dem visa enkla operationer på tallinjen. Endast 12 av 21 elever kunde visa $9 - 2$ på tallinjen och endast 7 av 21 kunde visa $5 - 8$.

När vi talar om tal använder vi ofta tallinjen som metafor och ger talen egenskaper av lägen, sträckor och rörelser. Till exempel säger vi att 37 är långt från 370 men 4,9 ligger nära 5. Vi kan räkna upp alla jämna tal mellan 62 och 80 men hoppa över de udda. När vi multiplicerar med 5 gör vi 5-skutt. Vi räknar baklänges från 63. Talens egenskaper av ordning; sträcka eller avstånd; rörelse eller förändring, blir synliga om vi arbetar med tal på tallinjen. Dessa egenskaper är viktiga komplement till tal som antal.

Tallinjen är starkt kopplad till mätning. På en tallinje behöver vi enbart erfara storlek och förändring i en dimension – längd. Att reducera något komplicerat till värden på en skala är ett sätt att förenkla tillvaron. Därför överför vi många olika storheter till en tallinje när vi vill mäta och jämföra dem. På bilderna syns några exempel på tallinjer vi möter i vardagen och som på en linjär skala visar volym, temperatur och vikt.



Tallinjen som modell av talen

Som vi såg på elevernas bilder är det inte självklart för alla hur tallinjen fungerar. Det blir ett viktigt undervisningsinnehåll att klargöra hur tallinjen fungerar som matematisk uttrycksform genom att belysa vilka egenskaper den har. Ska tallinjen fungera som ett sätt att kommunicera om tal måste vi alla ha en gemensam syn på hur den representerar tal.

Skillnad mellan talrad och tallinje

Uppräknandet och talramsans kan illustreras med en talrad. På en talrad kommer talen som kompakta enheter i form av diskreta tal. På bilderna ser du två olika talrader:

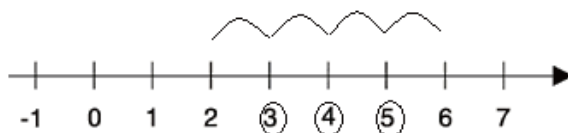
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇	◇◇◇◇◇	◇◇◇◇◇◇	◇◇◇◇◇◇	◇◇◇◇◇◇	◇◇◇◇◇◇	◇◇◇◇◇◇
					◇	◇◇	◇◇◇	◇◇◇◇	◇◇◇◇◇



Den övre talraden innehåller talen 1–9 med talbilder, den nedre innehåller talen 0–9 utan talbilder.

Talraden illustrerar ordningsegenskapen (ordinaliteten) hos tal. Varje tal kommer i en bestämd ordning och har en bestämd efterföljare. Problemet med talraden är att talen inte är kontinuerliga. Det finns exempelvis ingenting mellan talen 3 och 4. Var på talraden ska jag placera $\frac{1}{2}$ och 3,7?

Vi kan tänka oss tallinjen som ett staket, byggt av lodräta pinnar och vågräta regler. På staketet kan vi räkna såväl pinnarna som mellanrummen mellan pinnarna. Om jag talar om skillnaden mellan 2 och 6 är det kanske inte helt uppenbart att jag menar de fyra mellanrummen och inte de tre tal som finns mellan talen 2 och 6.



På nästa bild visas talens egenskaper som mätetal och avstånd. Det är ett känt fenomen att barn ofta gör fel när de ska mäta en längd om de missar att utgå från 0. Kanske beror felet på att de inte fokuserar mellanrummen mellan talen utan enbart punkterna.

En elev måste förstå att det är avståndet mellan punkten 6 och punkten 11 som är det mätetal som visar klämmans längd. På linjalen förekommer talen dels som punkter på tallinjen och dels som avstånd mellan punkterna. Vilken aspekt av talen som ska fokuseras i olika sammanhang är inte självklart för alla. Arbetar vi med att rita grafer i ett koordinatsystem är det punkterna som är intressanta, men gör vi ett stapeldiagram eller mäter med en linjal är det mellanrummen som blir betydelsefulla.

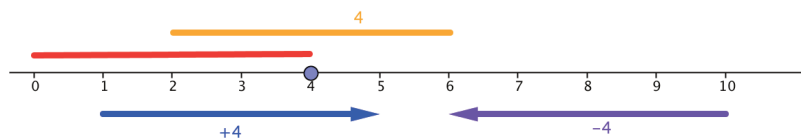


När eleverna i intervjustudien tillfrågades om de någonsin sett en tallinje, eller om de visste någon användning av en tallinje, svarade de flesta att de bara sett den i matteboken, aldrig någon annanstans. De få exempel som kom fram var termometern eller kalendern. Tidslinjer är lite speciella. Om vi gör en tidslinje över en timme eller ett dygn brukar vi göra den som en tallinje med en kontinuerlig skala. Klockan är en sådan tallinje. Vi kan mäta tiden kontinuerligt och se när den är nästan framme vid ett visst klockslag. En tidslinje som sträcker sig över en längre tid är däremot ofta diskret, egentligen en talrad. I månadskalendern har varje dag sin egen ruta, men vi skiljer inte på början och slutet av dagen och kan inte visa i kalendern när en halv dag har gått.

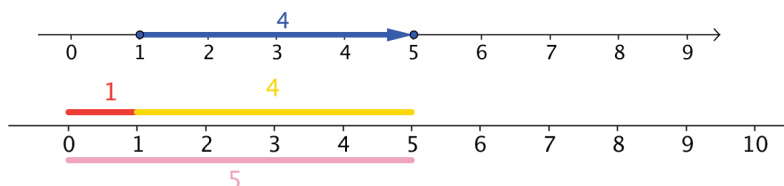


Talraden visar alltså *ordningen* på talen, ingenting mer. Talet 4 på talraden ovan är det fjärde avståndet och det kommer efter det tredje. Men talet 4 ser ut att vara lika stort som talet 3 eller talet 1. Talens storhetsaspekt kommer inte fram på talraden, vilket den gör på tallinjen.

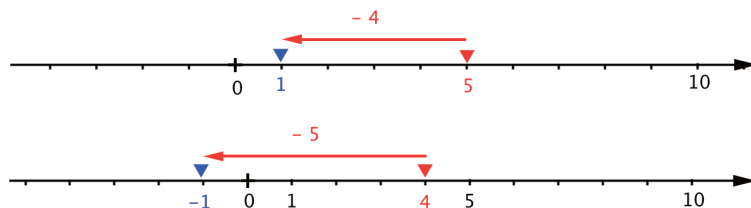
På tallinjen nedan kan vi istället se talet 4 illustrerat på en mängd olika sätt som framhäver olika egenskaper. Det är dels en *punkt* på tallinjen som visar ordningen. Det är även en *sträcka* som mäter *avståndet* mellan 0 och punkten 4, vilket i sig innefattar alla avstånd som är kortare (röda linjen). Vi kallar det för talets kardinalitetsaspekt: i talet 4 ryms även 1, 2 och 3, och alla ännu mindre delar av dessa. Talet kan även illustreras med ett annat avstånd på tallinjen som är precis 4 enheter långt, exempelvis avståndet mellan talen 2 och 6 (gula linjen), eller som en rörelse 4 enheter framåt (addition med talet 4, blå pilen) eller en rörelse 4 enheter bakåt (subtraktion med talet 4, lila pilen).



Vi använder oss av alla dessa egenskaper hos talen när vi tänker på operationer. Nedan ser du två olika sätt att visa beräkningen $1 + 4 = 5$ på tallinjen. I den första versionen är talen 1 och 5 punkter och talet 4 en rörelse från 1 till 5. I det andra exemplet är alla tre talen sträckor och vi visar att om sträckorna 1 och 4 läggs bredvid varandra så är de lika långt som sträckan 5.



En vanlig svårighet för elever i skolans tidiga år är att förstå subtraktionens anti-kommutativitet, dvs att $5 - 4 \neq 4 - 5$. På tallinjen blir detta uppenbart om vi utnyttjar egenskapen att tal kan ses som rörelse.



Egenskaper hos tallinjen

För att tallinjen ska fungera som modell av talen behöver vi vara överens om hur modellen fungerar. Därför är det viktigt att vi klargör vilka överenskomelser det finns när det gäller tallinjen.

1. Ordningen från vänster till höger

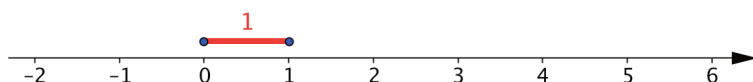
De reella talen utgör en ordnad mängd. Vi visar denna ordning från vänster till höger på tallinjen, eller nerifrån och uppåt om vi har en lodrät tallinje som i ett koordinatsystem. Talens *värde ökar åt höger* och minskar åt vänster. Detta visas med *pilen åt höger*, den positiva riktningen. Moderna svenska läroböcker visar denna ordning genom att rita en pil längst till höger på tallinjen. En äldre innebörd av pilen, som fortfarande används i vissa delar av världen, är att rita den på både vänster och höger sida för att illustrera att tallinjen fortsätter. Det är överflödigt information eftersom en linje per definition inte har någon början eller något slut.

2. Utgångspunkten noll, 0

Talet 0 har en speciell status. Det kallas ibland origo, begynnelsepunkt eller nollpunkt. Det är ett unikt tal eftersom det på tallinjen endast kan illustreras som en punkt. Talet 0 är ingen sträcka och ingen rörelse. Denna egenskap framgår inte på talraden i början av artikeln där alla tal inklusive noll ges samma utrymme. Tallinjen är symmetrisk kring talet 0. De negativa talen ligger på linjen i *negativ riktning från 0* på så sätt att vi räknar hur många enheter vi avlägsnar oss från noll. Ordningen på den negativa sidan blir därför motsatt mot den positiva sidan, även om talens värde fortfarande sägs öka från vänster till höger. Detta innebär att negativa tal har två olika storleksegenskaper. Till exempel är talet -4 "ett större negativt tal" än talet -3 eftersom det ligger längre från talet 0, samtidigt är talet -4 "ett mindre tal" än talet -3 eftersom det ligger längre till vänster. Vi kan kalla det första för absolutbelopp och det andra för värde.

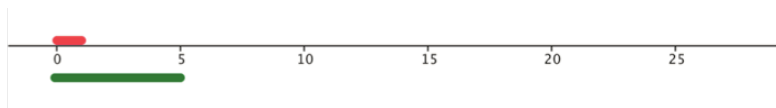
3. Enhetsintervallet (ettan) är sträckan mellan 0 och 1

Enhetsintervallen bygger upp tallinjen. En hel på tallinjen är alltid ett avstånd som är lika långt som avståndet mellan 0 och 1.



4. Större intervall byggs upp av enhetsintervallet

Vi gör skutt eller hopp på tallinjen som består av multiplar av enhetsintervallet, de är alltså proportionella mot enhetsavståndet. Till exempel är avståndet eller rörelsen 5 på tallinjen alltid 5 gånger så lång som enhetsintervallet.



5. Enhetsintervallet (ettan) kan delas upp i delintervall

Delar i form av bråk eller decimaler relateras alltid till enhetsintervallet. Rationella tal mellan 0 och 1 placeras mellan talen 0 och 1 på tallinjen. Till exempel kan $\frac{1}{2}$ ses som antingen punkten mitt emellan talen 0 och 1, eller som avståndet från 0 till punkten $\frac{1}{2}$, eller som ett avstånd eller en rörelse som är precis $\frac{1}{2}$ enhetsintervall långt någon annanstans på tallinjen.



Undervisning om tallinjen som modell av talen

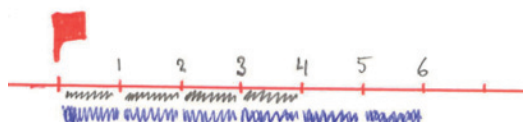
Vi ska titta på en del av en lektion som handlar om att göra tallinjen till en modell av talen. Beskrivningen är utvecklad från en lektion i åk 1 i Ryssland som jag sett på video utan att få en översättning. Uppgiften börjar med att läraren visar två vaser och frågar: *Är det lika mycket vätska i båda vaserna?*

Efter en stunds diskussion konstateras att vaserna har olika form och är olika vida och därför kan man inte bara jämföra höjden. Nu uppstår nya frågor:

- ♦ I vilken vas finns det mest vätska?
- ♦ Hur stor är skillnaden?
- ♦ Hur kan vi ta reda på det?

Att mäta upp vätskan i de olika vaserna är en strategi. Läraren plockar fram ett mindre glas och tillsammans håller de och räknar hur många små glas som fylls av vätskan i varje vas.

För att hålla ordning på räkningen ritar läraren en linje på tavlan och markerar med en vimpel var de ska börja räkna. Talet 0 är så speciellt att det får komma senare. Allteftersom glasen fylls markeras intervallen och talen skrivs succesivt i ordning. När båda mängderna har blivit uppmätta finns följande tallinje på tavlan:



Situationen med jämförelse av vätskor har nu modellerats med hjälp av en tallinje. Den tredimensionella storheten volym har reducerats till en dimension och vi ser att den vänstra vasen rymmer fyra glas och den högra rymmer sex glas. Nu kan vi lätt jämföra de två volymerna som är representerade som sträckor på tallinjen. Samtal kan föras kring hur stor skillnaden är. *Är skillnaden 5?* Talet 5 ligger ju mellan 4 och 6. *Eller är skillnaden 1?* Det finns endast ett tal mellan 4 och 6. *Eller är skillnaden 2?* Det finns två mellanrum, enhetsintervall, mellan 4 och 6.

Eleverna övertygar varandra och läraren att det är mellanrummen som representerar skillnaden, de har ju själva varit med och mätt upp den. Vi kan sedan gå vidare och fråga hur skillnaden skulle se ut om vi hällde i ett glas till i varje vas. Eller om vi hällde i ett halvt glas till i varje. Den beskrivna övningen är ett exempel på problemlösning som behandlar mätandets princip. Samtidigt är det en lektion i hur tal kan representeras och tolkas på tallinjen, hur tallinjen fungerar som representation av tal.

Tallinjen som modell för att tänka

Tallinjen kan användas som modell för att tänka; att operera, resonera och kommunicera om tal. Titta på bilden av cykeln i gatan. De som vet vad en cykel är ser direkt när de kommer åkande i bil eller på cykel att det är här cykeln ska vara. Bilden av cykeln är till för att kommunicera ett budskap. Det är inte en modell som ska lära någon vad en cykel är. Den som inte vet vad en cykel är kan inte lära sig det av den här bilden.

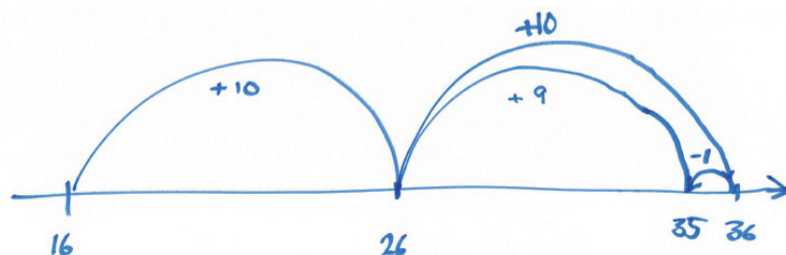
På samma sätt är det med tallinjen. För att fungera som redskap för att tänka och kommunicera om tal behöver tallinjen vara en modell av talen på samma sätt för alla. När både lärare och elever känner sig trygga med tallinjen kan de använda den för att skissa, visa huvudräkningsstrategier och beskriva resonemang. Då blir den en modell *för tanken*, inte enbart en modell *av talen* och man kan också kosta på sig att förenkla. Det är svårt att rita en perfekt cirkel utan passare. Men om alla vet vad en cirkel är och jag ska rita en för att resonera om skillnaden mellan en linje som skär cirkeln och en som tangerar, då behöver den inte vara perfekt.



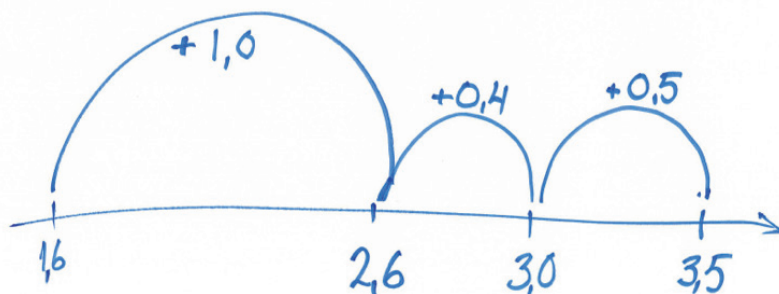
Den tomma tallinjen

När tallinjen ska vara en tankemodell är det bra om den är enkel. Man kan utgå från en linje som är tom, eller öppen, i bemärkelsen att inga tal eller markeringar finns från början. En linje ritas och endast de tal som behövs markeras, inga andra. Visas ett tal som en sträcka eller rörelse så skriver man ut vilken sträcka eller rörelse som avses och lägger inte möda på att få bilden helt proportionerlig. Man vet ju redan hur tallinjen fungerar så man kan tillåta sig att vara lite slarvig. Just den tomma tallinjen har visat sig underlätta elevernas kreativitet i att utveckla strategier, eftersom de inte blir "låsta" av de redan utsatta markeringarna. Istället för att alltid dela upp ett tal i ental eller tiotal som är markerade på en färdig tallinje blir de fria att göra helt andra uppdelningar.

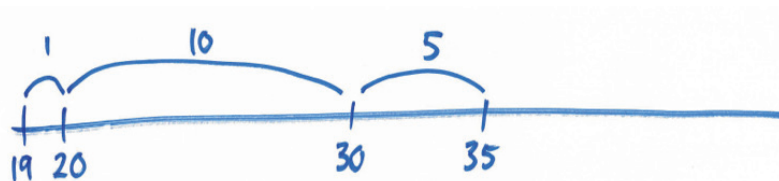
Här visas några exempel på olika räknestrategier för att beräkna $16 + 19 = 35$ och där den tomma tallinjen har använts för att representera dem. I ena fallet adderas först 20 och sedan subtraheras 1, representerat genom de tre rörelserna $+10 + 10 - 1$. I samma bild visas också addition med 19 representerat genom rörelserna $+10 + 9$. I båda fallen börjar man på 19 och slutar på 35.



Resonemanget kan överföras till ett annat talområde. I den andra bilden visas additionen $1,6 + 1,9$. Den valda strategin här är att dela upp 1,9 i mindre delar för att så mycket som möjligt kunna arbeta med heltal.

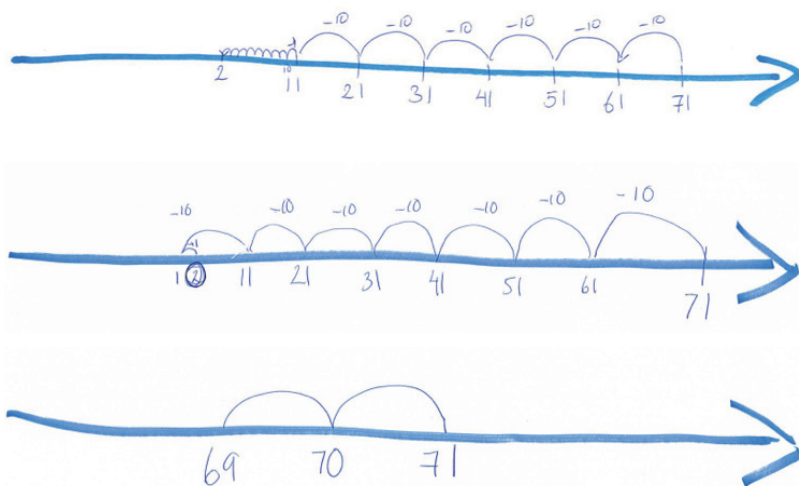


Nästa bild kan illustrera tre olika beräkningar: $35 - 19 = 16$ eller $19 + 16 = 35$ eller $35 - 16 = 19$. I de två första beräkningarna är 19 och 35 punkter på tallinjen och 16 är skillnaden i avstånd mellan punkterna. Utifrån den här representationen kan vi föra resonemang om hur de två beräkningarna är relaterade till varandra och slutligen dra den generella slutsatsen att alla subtraktioner kan skrivas om till additioner. $35 - 19 = x \Leftrightarrow 19 + x = 35$. I den tredje beräkningen är 35 en punkt och -16 en rörelse bakåt som slutar på punkten 19.



Följande illustrationer visar tre elevers olika sätt att beräkna $71 - 69$, med allt effektivare strategier som utnyttjar förmågan att dela upp tal på olika sätt och visar olika nivåer i utvecklingen av en god taluppfattning. Den första ser subtraktion som rörelse bakåt och är fast i att tänka tiotal och ental. Det blir

6 tioskutt och 9 entalsskutt bakåt, totalt 14 tankeled att räkna. Den andra gör fortfarande tioskutt bakåt men gör istället 7 tioskutt och kompenserar med att addera ett. Den tredje ser 69 och 71 som två tal på tallinjen och visar att skillnaden mellan dem är 2 eftersom man bara behöver gå två steg från 69 till 71. I de båda första strategierna ses talen 71 och 2 som punkter och det tal, 69, som ska subtraheras som rörelse. I det sista fallet ses talen 71 och 69 som punkter och 2 som avståndet mellan dem.



Summaring

Den här artikeln har försökt beskriva tallinjen som ett didaktiskt redskap, framförallt hur tallinjen kan vara en modell *av* talen och vilka egenskaper hos talen som kommer fram på tallinjen. Artikeln är den första i en serie artiklar om tallinjen där de kommande innehåller fler undervisningsexempel på hur tallinjen kan användas som en modell *för* att tänka och resonera om tal, till exempel genom att använda den tomma tallinjen för att utveckla strategier för addition och subtraktioner, två korsande tallinjer för att utveckla multiplikativt tänkande och den dubbla tallinjen för att tänka och resonera om bråk.

LITTERATUR

- Drageryd, K., Erdtman, M., Persson, U. & Kilhamn, C. (2012). Tallinjen – en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik. *Nämnnaren* 2012:3.
- University of California (2014). *Learning mathematics through representations*. Berkeley, CA. www.culturecognition.com/lmr/
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Doktorsavhandling. Göteborgs universitet.