Tidigare algebra

Johan Häggström

Algebra har i alla tider ansetts besvärlig och abstrakt. Det kan vara ett långt steg att gå från att räkna med tal till att räkna med bokstäver. I andra länder börjar man tidigare än vi. I denna och en följande artikel beskrivs hur man tänker och gör i Australien.

Högstadieproblem

I den nationella utvärderingen av grundskolan (Skolverket, 1993) så finns en tydlig skillnad mellan hur eleverna uppfattar matematiken i tidigare årskurser jämfört med senare. En större andel elever får svårigheter under högstadiet. Allan Svensson (1995, samt Skolverket & VHS, 1995) har funnit att många sk potentiella NT-elever tappar matematikintresset under högstadiet. Detta fenomen är inte unikt för svenska elever utan återfinns i de flesta länder. Samtidigt kan man på goda grunder förutspå att goda kunskaper i matematik kommer att bli allt viktigare i framtiden, i ett allt mer matematikorienterat högteknologiskt samhälle.

Vad är det i högstadiematematiken som ställer till det? Det finns naturligtvis inget enkelt svar på frågan, men en komponent som bidrar till svårigheterna är säkert det här med ”bokstavsräkning”. Introduktionen av algebra har varit en isolerad högstadieangelägenhet. Den blir för många elever en prövning som uthålligheten inte räcker till för. Att algebra är svårt att tillägna sig är ingen nyhet, se texten från 1600-talet ovan.

Algebra i Australien

I de nya läroplaner som producerats i flera länder de senaste åren kan man spåra mer eller mindre tydliga försök att bryta algebrans isolering till högstadiet, eller motsvarande. I den australiska kursplanen i matematik, National Statement (se s 22), är man tydlig beträffande målsättningen

Algebra är Människiornes Förstånds helige Pröfwosteen så at then som thenna Konst wäl förståår kan sig försäkra at intet skal förekomma thet han icke förstå kan.

(ur Biörks Arithmetica, se Niss et al 1994)

med algebraundervisningen men även vad gäller vägen fram till målet. Undervisningen ska utveckla elevernas förmåga att

– kunna ta sig från ett specifikt problem till ett generellt påstående.

– kunna uttrycka generaliseringen algebraiskt.

– manipulera det algebraiska uttrycket.

– tolka resultatet.

Eleverna ska inse att när de väl har uttryckt problemet matematiskt kan de handskas med detta uttryck oberoende av den ursprungliga kontexten (National Statement s 196).

Introduktionen av algebra sker, precis som i Sverige, vanligtvis på högstadiet. I National Statement framställs algebraiskt kunnande/tänkande som en följd av tidigare studier av mönster och ordning, inte som ett isolerat moment som endast behandlas på högstadiet. *Basic patterns of algebraic thinking are developed during the primary years* (National Statement s 190). Denna syn är ett brott med den traditionella uppfattningen i Australien. I den

Johan Häggström är lärarutbildare på Matematikavdelningen, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

svenska kursplanen, står det under mål som eleverna ska ha uppnått i slutet av det femte skolåret,

> *– Eleven skall kunna upptäcka talmönster och bestämma obekanta tal i enkla formler.*

Denna skrivning liknar tankegångarna i National Statement. Genom att arbeta med talmönster i tidiga årskurser bereder man vägen för introduktionen av den symboliska algebran senare i grundskolan.

I anslutning till kursplanen i matematik har den australiska matematiklärarföreningen tagit fram stöd och stimulansmaterial som behandlar olika moment. *Pattern, Order and Algebra* är ett studiematerial i första hand för fortbildning av lärare (K - 12). Materialet koncentrerar sig på framställningen av algebra i National Statement, både med avseende på undervisning och inlärning.

Den nya synen på algebrainlärning är en anledning till att författarna kombinerar mönster, ordning och algebra i samma studiepaket. Syftet med framställningen är att ge läsaren en möjlighet att begrunda rötterna till algebraiskt kunnande, upptäcka bandet mellan aritmetik och algebra samt se på vilka sätt elever kan knyta dessa band. Dessutom vill man visa hur funktionssamband kan representeras och beskrivas. Materialet består av ett häfte indelat i åtta moduler, samt fem kortare artiklar.

1 Pattern, order and algebra.
2 Number patterns.
3 The meaning of a pronumeral.
4 Understanding variables.
5 Representing relationships.
6 Understanding equations.
7 Broader approach.
8 Grafical and numerical solutions.

Till häftet på dryga hundra sidor följer en stor uppsättning kopieringsunderlag för stordia. I denna artikel behandlas 1–3.

1 Pattern, order and algebra

Här ges en översikt av algebran i National Statement (se bil). Man konstaterar att många elever tycker att det algebraiska symbolspråket är svårt att lära sig och är motvilliga att använda algebraiska metoder vid problemlösning. Ett sätt att underlätta övergången till algebra är att tidigt (redan i förskolan) låta eleverna göra övningar där det gäller att sortera saker, försöka komma på efter vilka regler en sortering är gjord etc. Eleverna uppmuntras att uttrycka mönster och regler informellt, genom muntliga och skriftliga beskrivningar eller informella diagram.

Denna del avslutas med några studieuppgifter, där kursdeltagarna själva får pröva att upptäcka och beskriva talmönster. Ett par exempel

- *Vi vet att*

  999 x 10 =   9990
  999 x 11 = 10989
  999 x 12 = 11988

  Använd mönstret för att gissa värdet av 999 x 18. Hur kan du få fram det? Varför blir det så?

- *De första åtta Fibonacci-talen är*

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

  Vilka är de följande fyra talen?

  Välj ett godtyckligt tal i talföljden. Kvadrera det. Hur är resultatet relaterat till talen direkt före respektive efter det kvadrerade talet? Upprepa detta med ett annat tal. Vad upptäcker du?
  Kvadrera två på varandra följande (konsekutiva) Fibbonacci-tal. Addera resultaten. Vad upptäcker du? Upprepa med två andra tal.

2 Number patterns and the development of algebraic concepts

Syftet med denna modul är visa hur man med ”hitta mönster”-övningar (pattern stimulus items) kan introducera algebraiska begrepp. Målsättningen är att deltagarna ska bli medvetna om spännvidden i elevers beskrivningar av mönster och behovet av att utveckla elevernas uppfattning av mönster samt att få deltagarna att förstå kopplingen mellan erfarenhet av talsamband, språklig utveckling och framväxten av algebraiska begrepp. Det är viktigt att lärare i primary school (åk 1–6) inser betydelsen av ett utvecklat språk för att beskriva mönster och generaliseringar samt hur detta kan utnyttjas vid introduktionen av algebra i senare årskurser. Sin utgångspunkt tar man i en undersökning gjord av University of New England med 1 500 deltagande elever i åk 5 till 8. Eleverna får uppgifter där det gäller att hitta ett mönster och att beskriva detta både med vanligt språk och med matematiska symboler. Uppgifterna är utformade på liknande sätt.

Ett exempel (Question 4)

I figuren finns 3 grupper av rutor byggda efter en speciell regel.

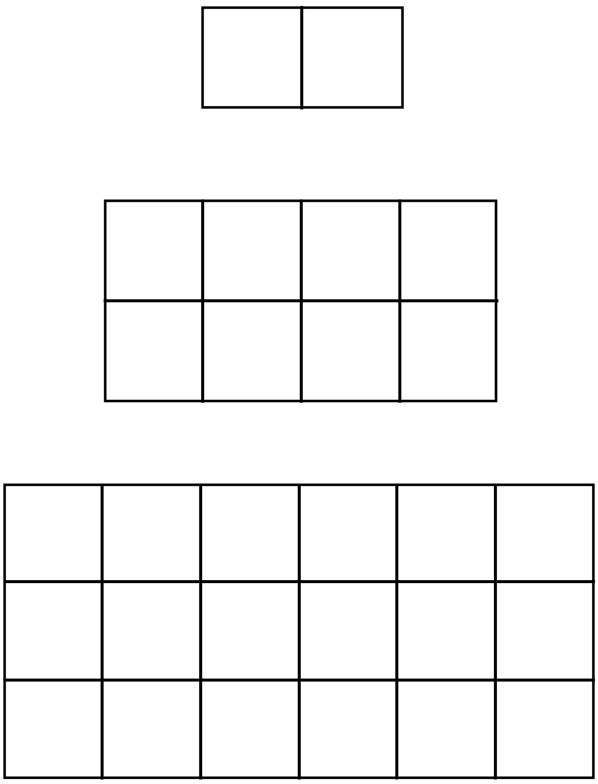
A Hur många rutor behövs totalt när den långa sidan består av 8 rutor?

B Skriv en mening på svenska som beskriver hur man får fram antalet rutor totalt om basen är av godtycklig längd.

C Hur många rutor behövs om basen består av 28 rutor?

D Ange ditt samband från uppgift B med matematiska symboler istället för ord.

E Kan du ange ditt samband på något annat sätt?



Deluppgift A ska klargöra elevens förståelse/tolkning av uppgiften. B undersöker hur elevens språkliga förmåga är i relation till uppfattningen av uppgiften. C ger en indikation på elevens förmåga att utvidga mönstret samt förtydligar det språk eleven använt i uppgift B. D undersöker elevens vilja och förmåga att använda symboler för att beskriva mönstret. E anses inte nödvändig, men ger de snabba eleverna god sysselsättning. Svaren ger intressanta inblickar i elevernas tänkande.

Modulen innehåller fyra diskussionsuppgifter (workshop activities). Den första om hur man kan klassificera elevsvar på uppgifter av typ B (beskrivning av mönstret med vanligt språk). Resultat från nämnda undersökning diskuteras. Den andra behandlar på liknande sätt elevsvar på uppgifter av typ D (beskrivning av mönstret med matematiska symboler), samt jämför svar av typerna B och D. Uppgifterna ska få deltagarna att fundera över vad det finns som talar för algebra-aktiviteter i tidigare årskurser.

I nästa uppgift presenteras ett sätt att från övningar med mönster närma sig algebran. Den är indelad i tre faser.

Fas 1. Experiencing activities with number patterns

En sådan aktivitet kan vara av samma typ som uppgiften ovan. Eleverna får i uppgift att göra nästa figur, att ta reda på hur många rutor som behövs till den 5:e och 6:e figuren, visa i en tabell hur många rutor som behövs etc. Uppgifterna kan varieras i det oändliga.

Fas 2. Language development

Det är viktigt att använda tillräckligt med tid för att utveckla elevernas språk. Eleverna tränas i att beskriva olika mönster så att läraren och klasskamraterna kan förstå. Det kan vara att beskriva hur man hittar den 9:e figuren, att med hjälp av en tabell beskriva hur man kommer till den nedersta raden utgående från den översta, beskriva en regel som gör att man kan få fram en godtycklig figur i serien, hitta på ett eget mönster och låta en klasskamrat återskapa det utgående från en beskrivning etc. Här, menar man, är det speciellt viktigt att uppmärksamma skillnader i elevers beskrivningar. Olika, men riktiga beskrivningar bör diskuteras, ”varför är båda riktiga?”

Fas 3. Algebra emerges

Många elever tycker efter ett tag att det blir tröttsamt att skriva förklaringar och börjar använda förkortningar. Med lite uppmuntran från läraren kan denna utveckling snabbas på, antal tändstickor blir tändstickor ... tänd ... *t*. Användandet av första bokstaven i ett ord för att beteckna antalet är känsligt eftersom det kan leda till att eleverna ser bokstaven som ett objekt. Därför måste läraren hela tiden poängtera att bokstaven representerar antalet. Så småningom uppstår ett behov av att komma överens om någon typ av standard för de symboliska noteringarna. Det blir en följd av svårigheterna att kommunicera om varje elev utvecklar egna symboler.

Denna uppläggning av introduktionen till skolalgebran, menar författarna, har inte som målsättning att eleverna genast ska bli duktiga på algebraiska manipulationer. Tvärtom så väntar man avsiktligt med att ta upp sådana färdigheter till senare. I stället skapar man en bra miljö där eleverna utvecklar tidiga algebraiska begrepp. Enligt en rapport av Pegg och Redden (1990) kan den ge eleverna möjlighet att

– *upptäcka behovet av algebraisk notation som en naturlig och användbar konsekvens av att uttrycka generaliseringar.*
– *känna igen och acceptera olika uttryck för samma mönster.*
– *inse att de algebraiska symbolerna står för tal – speciella tal till en början och senare även för godtyckliga tal.*
– *acceptera algebraiska konventioner som en naturlig konsekvens av utvecklingen av ett precist, koncist språk.*
– *informellt etablera regler för manipulationer av algebraiska uttryck som en följd av jämförelser mellan olika uttryck för samma mönster.*

Den fjärde diskussionsuppgiften låter deltagarna reflektera över möjliga tillfällen att använda beskrivningar av mönster och generaliseringar i klassrummet, samt på vilket sätt tekniska hjälpmedel skulle kunna användas.

3 How do students interpret the meaning of a pronumeral

Här lyfter man fram en kritisk punkt i inlärningen av algebra. Det finns klara bevis för att många elever, även efter flera års algebrastudier, har en väldigt begränsad uppfattning av vad bokstavssymboler står för. Författarna menar att en större mängd ekvationslösning, förenkling av uttryck, derivering etc inte hjälper dessa elever att utveckla sin uppfattning av symboler.

Målsättningen är att ge deltagarna
– *en förståelse för spridningen i elevers uppfattningar av bokstavssymboler.*
– *några idéer om hur man kan identifiera olika uppfattningar.*
– *förmåga att förklara vissa elevfel i termer av olika tolkningar.*
– *några idéer om hur man kan behandla detta i klassrummet.*

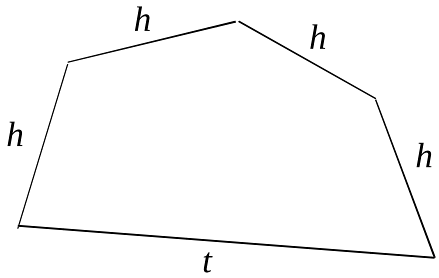
Man tar sin utgångspunkt i en undersökning av Dietmar Kücheman (1981) där sex skilda elevuppfattningar kunde urskiljas.

Ett exempel på uppgiftsblad som Kücheman använde i sin undersökning och som du kan pröva med dina elever:

1 Vad kan du säga om a, då $a + 5 = 8$?

2 Vad kan du säga om $a + b + 2$, då $a + b = 43$?

3 Ange omkretsen.



4 Multiplicera $n + 5$ med 4.

5 Vad kan du säga om c , *då* $c + d = 10$, och $c < d$?

6 Vilket är störst $2n$ eller $n + 2$?

Kücheman fann en koppling mellan elevernas uppfattningar och resultatet på olika uppgifter, kategorier:

Bokstaven tilldelas ett värde

Denna kategori innehåller svar där bokstaven från början ges ett numeriskt värde.
Ex: *Vad kan du säga om* a, *då* a *+ 5 = 8?*
För att lösa denna typ av uppgift räcker det att tilldela bokstaven ett numeriskt värde. Eleven får svaret 3 genom att helt enkelt använda talfakta. Eleven vet att 3 + 5 = 8.

Bokstaven används inte

Här ignorerar eleverna bokstäverna, eller ger dom ingen mening.
Ex: *Vad kan du säga om a + b + 2, då a + b = 43?*
Här kan man få 45 via eliminering av *a + b*.

Bokstaven används som objekt eller förkortning

Bokstaven betraktas som en förkortning för ett objekt eller som ett eget objekt.
Ex: *2a + 5a = ?*
Om eleven tolkar *a* som ett objekt (t ex *a* betyder äpple, apple) blir uppgiften lätt. 2 äpplen + 5 äpplen = 7 äpplen. Denna misstolkning fungerar visserligen i uppgifter av den här typen, men leder till svårigheter med andra.

Bokstaven används som ett specifikt, okänt tal

Eleverna ser bokstäver som speciella men okända tal och kan operera på dessa direkt.
Ex: *Multiplicera n + 5 med 4.*
Här måste eleven tolka *n* som ett tal för att operationen ska bli meningsfull.

Bokstaven används som ett godtyckligt tal

Bokstäverna representerar, eller har åtminstone möjlighet att representera, fler än ett värde.
Ex: *Vad kan du säga om c , då c + d = 10, och c < d?*
Här måste eleven inse att en bokstav kan stå för fler än ett värde.

Bokstaven används som en variabel

Bokstäver anses kunna stå för en uppsättning av ospecificerade värden och ett systematiskt förhållande existerar mellan två sådana mängder av värden.
Ex: *Vilket är störst 2n eller n + 2? Förklara.*
Här måste en elev inse att en bokstav kan stå för en mängd olika värden samtidigt som denne överväger möjliga restriktioner.

De första tre kategorierna representerar en lägre nivå av uppfattning. Dessa uppfattningar är förvisso tillräckliga för att klara en del uppgifter, men eleven undviker samtidigt egentligt algebraiskt tänkande. För att få någon som helst förståelse för algebra, verkar det som om eleverna till att börja med måste inse att en bokstav kan stå för ett visst tal, menar författarna. En slutsats av undersökningen är att väldigt lite av det som hittills skett på algebralektioner hjälper eleverna att förstå vad en variabel är. Detta understryks ytterligare i en undersökning där 116 förstaårs universitetsstudenter svarade på samma frågor och med nästan samma resultat som 14-åringarna i Küchemans undersökning.

Referenser

Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Utkast till Kommentarer till kursplan i matematoik, Lpo 94*. Bidrag vid Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs 18-21 juni, 1995. Stencil.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (pp.102-119). London: Murray.

MacGregor, M., Stacy, K., Pegg, J. & Redden, T. (1994). *Pattern, Order and Algebra.* Adeleide: Australian Association of Mathematics Teachers Inc.

Niss, M., Johansson, B. & Emanuelsson, G. (1994). Varför ska man lära sig matematik? – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson, B. Rosén & R. Ryding (Red), *Dokumentation av den 8:e Matematikbiennalen.* Göteborg: Institutionen för Ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Pegg, J. and Redden, E. (1990). Procedures for, and experiences in, introducing algebra in New South Wales. *Mathematics Teacher **83**(5)*. NCTM. Washington

Skolverket (1993). Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik åk 9. Huvudrapport. *Skolverkets rapport nr 15.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket & VHS (1995). Att välja bort naturvetenskap och teknik. NOT-häfte nr 3, 1995.

Svensson, A. (1995). Högstadiets matematik skrämmer. *Nämnaren, **22**(1)*, 8-11.

National Statement, Australien

Kursplanen i matematik i Australien innehåller åtta huvudmoment

1 *Attitude and appreciation*
2 *Mathematical inquiry*
3 *Choosing and using mathematics*
4 *Space*
5 *Number*
6 *Measurement*
7 *Chance and data*
8 *Algebra*

Varje huvudmoment är i sin tur uppdelat i fyra nivåer, A, B, C och D. Algebra är dessutom uppdelat i tre sektioner:

– Generaliseringar

– Funktioner

– Ekvationer

Generaliseringar

Nivå A och B: Eleverna undersöker mönster i arrangemang med figurer och i talföljder. De beskriver de mönster de kan hitta muntligt, gör förutsägelser och försöker hitta förklaringar.

Nivå C: Eleverna uttrycker generaliseringar med hjälp av vanliga algebraiska symboler.

Nivå D: Eleverna uttrycker generaliseringar och funktionssamband algebraiskt samt transformerar uttryck till alternativa former för speciella syften.

Funktioner

Funktioner behandlar relationer mellan mängder och grafisk representation.

Nivå A och B: Eleverna konstruerar och tolkar grafer som beskriver kända händelser och situationer.

Nivå C: Eleverna ska kunna identifiera variationen i en situation, använda grafer för att beskriva situationer samt kunna göra förutsägelser baserade på egenskaper så som lutning och vändpunkt.

Nivå D: Eleverna ska vara bekanta med och känna igen olika typer av funktioner och deras egenskaper samt undersöka rekursion och periodicitet.

Ekvationer

Ekvationer behandlar att ställa upp och lösa ekvationer och olikheter.

Nivå A och B: Eleverna ställer upp och löser enkla likheter.

Nivå C: Eleverna ska kunna formulera ekvationer till vardagliga problem, lösa ekvationer på olika sätt samt tolka lösningarna.

Nivå D: Eleverna ska kunna formulera och lösa ekvationer och ekvationssystem med hjälp av grafiska, numeriska och algebraiska metoder.

Enligt National Statement är ett viktigt mål med undervisningen i algebra att utveckla elevernas förmåga att

- kunna ta sig från ett specifikt problem till ett generellt påstående
- kunna uttrycka generaliseringen algebraiskt
- manipulera algebraiska uttryck
- tolka resultatet

Eleverna ska inse att när de väl har uttryckt problemet matematiskt kan de handskas med detta uttryck oberoende av den ursprungliga kontexten.

Den algebra som ingår i nivå A, B och C anses vara nödvändig kunskap.