INGER WISTEDT, ROBERT LAGERGREN M FL

Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik

Här presenteras två examensarbeten från Växjö genomförda i åk 3 – 4 av Linda Gunnarsson och Anna-Karin Hartonen och i åk 8 av Britt Grant och Johanna Håkansson. Uppsatserna behandlar matematiska förmågor och hur lärare kan upptäcka dessa hos sina elever.

Matematisk fallenhet kan finnas hos fler elever än vi väntar oss. Det visar resultaten av två examensarbeten inom lärarutbildningen vid Växjö universitet. Arbetena har handletts inom forskningsprojektet ”Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik”, som tidigare presenterats i Nämnaren (Wistedt, 2005). Uppsatserna ger inte bara inblick i hur matematiska förmågor uttrycks hos elever, 10 och 14 år gamla, utan också vad som krävs för att en lärare ska kunna upptäcka och utveckla dessa förmågor.

Vad är matematisk förmåga?

Vad är då matematisk förmåga och hur tar den sig uttryck? Definitionen av *matematisk förmåga* hämtar vi från den ryske forskaren V. A. Krutetskii (1976), som i en longitudinell studie, 1955 – 66, följde barn och vuxna med exceptionell matematisk talang, men även barn och ungdomar med svårigheter att klara matematiken. Han beskriver förmåga som något dynamiskt och föränderligt, en potential som vi utvecklar i en verksamhet. Denna dynamiska syn på förmåga stämmer för övrigt väl med den moderna forskningens syn på relationen mellan arv och miljö som ömsesidigt beroende. Även vårt genetiska arv förändras under livet genom miljöpåverkan. Visst har arvet betydelse, men matematisk förmåga är ingen statisk ”gåva” som vissa har och andra saknar.

Matematisk förmåga är alltså något vi utvecklar när vi ägnar oss åt en matematisk aktivitet och det är också där vi kan upptäcka den, och då inte bara hos elever med tydlig matematisk fallenhet. Eftersom förmågor är utvecklingsbara är det viktigt att också se den potential som finns hos elever med en mera begränsad matematisk talang. Istället för att leta efter svagheter hos elever uppmanar Krutetskii oss att söka efter elevernas starka sidor. Matematisk förmåga är nämligen inte *en* förmåga utan en mångfald förmågor som kan kompensera varandra inom vida gränser. Grovt kan de delas in i tre kategorier: förmåga att insamla, bearbeta och bevara matematisk information:

Insamla matematisk information

- Förmåga att tänka matematiskt och fånga den formella strukturen i ett problem.

Bearbeta matematisk information

- Förmåga att tänka logiskt och förstå matematiska symboler.
- Förmåga att generalisera matematiska objekt, relationer och operationer.

- Förmåga till ett flexibelt tankesätt där man lätt växlar mellan strategier och representationer.
- Förmåga att förkorta och förenkla matematiska resonemang och operationer.

Bevara matematisk information

- Förmåga att minnas matematiska relationer och metoder för problemlösning.

Vilka förmågor fann vi ?

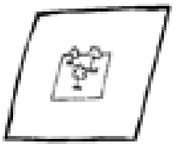
Lärarstudenterna genomförde studierna i sina VFU-skolor. En studie genomfördes i skolår 3 – 4 (Gunnarsson & Hartonen, 2006) och en i skolår 8 (Grant & Håkansson 2006). Båda studierna finns tillgängliga i sin helhet på Växjö universitets hemsida.

Eftersom arbetet krävde tillgång till ett rikt material om hur elever arbetar med matematik, koncentrerades studierna till ett fåtal elever (12 respektive 23). Eleverna arbetade i grupper om tre till fyra elever med *rika matematiska problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005), dvs intresseväckande uppgifter som kräver viss ansträngning och där det inte är självklart vilka strategier som kan användas. Sådana uppgifter ger eleverna möjlighet till matematiska diskussioner och oss som forskare möjlighet till material för en noggrann och detaljerad analys av elevers förmågor så som de kommer till uttryck när de löser uppgiften

I undersökningen fann studenterna fyra av Krutetskiis sex matematiska förmågor. Här ger vi några exempel på hur dessa förmågor kom till uttryck i elevernas lösningar. Vi väljer ett exempel från de yngre barnens arbete, en grupp där Jessica, Melissa och Ron arbetar tillsammans. Uppgiften som de arbetar med kallar vi *Sunes trädgårdsland.*

Sunes trädgårdsland

1 Sune har ett blomland. Han vill lägga plattor runt det lilla landet. Blomlandet har fyra lika långa sidor och en platta är lika stor som blomlandet. Hur många plattor behöver han köpa för att de ska räcka runt blomlandet?



2 Sune bestämmer att han ska ha två små blomland bredvid varandra. Hur många plattor behöver han då?

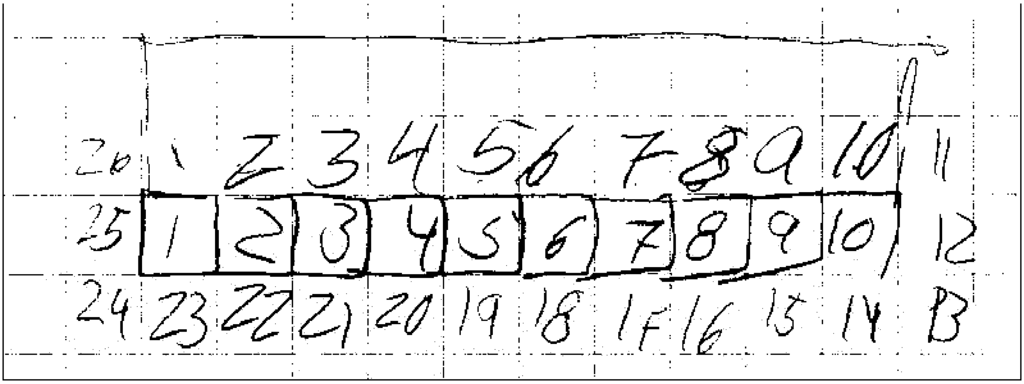
3a Hur många plattor går det åt om han vill ha 10 blomland bredvid varandra?

3b Hur många plattor går det åt om han vill ha 30 blomland bredvid varandra?

4 Sune har lite svårt att bestämma sig. Nu vill han ha ett väldigt långt blomland som är 90 land bredvid varandra. Finns det något knep för hur man enkelt kan räkna ut hur många plattor som behövs?

5 Sune har 50 plattor. Hur många trädgårdsland räcker det till?

6 Sune har 79 plattor. Hur många trädgårdsland räcker det till?



Eleverna ritar en schematisk bild av blomlandet.

Förmågan att resonera matematiskt och fånga den formella matematiska strukturen i ett problem

Bilderna i uppgiften innehåller som synes en rad detaljer som eleverna väljer att bortse ifrån. De förenklar på så sätt bilden och det blir då tydligt att de förmår resonera abstrakt och avgöra vilken information som är viktig för problemlösningen. Den överflödiga informationen sorterar de bort.

När gruppen börjar på uppgift tre finns inga färdiga bilder till uppgiftstexten och eleverna väljer då att rita en schematisk bild av ett blomland omgivet av plattor. Melissa ritar sin skiss på ett rutat papper. Ron har svårt att se att rutorna hon ritar representerar blomland och plattor, eftersom de inte blir exakt lika stora som de är på bilderna i uppgiften:

Ron: Men hallå ett blomland är ju mycket större än det...
Melissa: Ja, ja men det behöver ju inte vara liksom så ...
Ron: Mmm.
Melissa: Tycker i alla fall inte jag ...
Ron: .... Men det måste ju va så...
Melissa: Det måste det ju inte.
Ron: Nej men alltså...
Melissa: Det kan man ju göra hur litet som helst...
Ron: Jahaaa!
Melissa: Så.
Ron: Ska de inte vara lika stora som den förra?

[Tystnad. Melissa ritar.]

Melissa: Man förstår ju i alla fall.

Melissa förstår att storleken på rutorna inte har någon betydelse i detta sammanhang. Hon visar här tecken på förmågan att insamla matematisk information genom att sortera bort information som inte är relevant i ett matematiskt sammanhang.

Förmåga att generalisera matematiska objekt, relationer och operationer

Förmågan att generalisera visar sig bl a i elevernas resonemang om hur vissa lösningsprinciper kan tillämpas i nya sammanhang.

Melissa: Ja. Men så här: om man haft 50 innan. Om man typ, i detta fallet, om det hade varit... Men titta här, vi har ju alltid haft någonting med 6 i slutet. Och därför blir det ju så här 50 minus 6.
Ron: Det blir ju 44.
Melissa: 50 minus 6 det blir ju 44.

Ron skriver svaret.

Melissa har upptäckt ett mönster i fallet där antalet plattor ska beräknas och försöker lista ut hur gruppen kan använda sig av det på de fall där antalet trädgårdsland efterfrågas. Melissa undersöker alltså om den tidigare lösningsmetoden går att använda i det omvända fallet. Dessutom prövar hon en lösning som är oberoende av antalet land/plattor. Talet 6 tycks alltid finnas med, konstaterar hon.

Förmåga till flexibelt tankesätt där man lätt växlar mellan strategier och representationer

I arbetet med uppgiften växlar flera av eleverna mellan olika lösningsstrategier. Nedan arbetar eleverna med 10 land (uppgift 3a) och man kan här se hur tre olika strategier samspelar, och att Jessica växlar mellan två av dem utan bekymmer:

Jessica: Sen tre där och tre där.
Ron: En, 2, 3.
Melissa: Ja 3 gånger 1, 2, 3...
Ron: 3 gånger...
Jessica: Men det måste väl vara 10 där?
Melissa: 9, 10, 11, 12...
Ron: Men hallå då blir det bara..
Melissa: 3 gånger 12.
Ron: Men hallå! Titta, då blir det bara två här vid. Om vi tar med den.
Jessica: Mm.
Ron: Mm.
Jessica: Och då blir det 12. Där är ju 12, 24 och sen de 2.

Om vi formaliserar elevernas resonemang och betecknar antalet land med n så kan Jessicas strategi representeras av uttrycket $2n+6$ (se figur 1 nedan). Melissa ritar rutor och säger sedan "3 gånger 12". Hon blir därefter avbruten av Ron, och vi vet därför inte om hon hade tänkt fortsätta resonemanget med att subtrahera 10, vilket i så fall skulle motsvara strategin som illustreras i figur 2 nedan. Rons strategi liknar Jessicas, men då han utgår ifrån en av hörnplattorna får han 12 plattor där Jessica får 10 och det totala antalet plattor fås som $2 \cdot 12 + 2$ (se figur 3). Jessica förstår att både hennes och Rons strategier fungerar och hon växlar enkelt mellan dem.

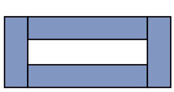
I de två sista uppgifterna krävs att eleverna byter strategi eftersom det där frågas efter hur många land plattorna räcker till. Uppgiften med 79 plattor ställer till bekymmer i samtliga grupper i studien. I en av grupperna diskuterar eleverna om det går att lösa problemet genom att rita och räkna. Man kommer fram till att det inte är någon lämplig strategi. Den andra strategin man använder är att gissa och pröva; man dubblerar två tal och lägger till 6 för att få resultatet 79 (se figur 1). Men gruppen är inte överens och man växlar då till en tredje strategi där man från summan 79 först tar bort 6, för att därefter dividera med 2. Men eftersom talet som ska delas med 2 är udda, återgår man till att gissa och pröva.

Förmågan att förenkla och förkorta matematiska resonemang och operationer.

Ett uttryck för strävan efter att förenkla och förkorta ett matematiskt resonemang finner vi när eleverna inte räknar varje sida för sig ($n+n+3+3$). Snabbt och lätt hoppar de över detta steg och räknar istället den långa sidan två gånger för att sedan lägga till 6 ($2n+6$). När de har förstått principen för resonemanget går det fort att få fram ett svar.

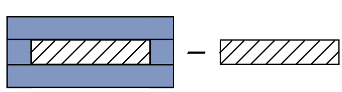
Ron: ... men då blir det ju..
Melissa: Vad blir 10 plus 10? Det blir 20 och sen plus 6.

Denna strävan, som kan te sig ganska harmlös, kan vi säkert finna hos många elever i åldersgruppen. Mer avancerade exempel på förmågan att förenkla resonemang beskrivs i studien som genomfördes i skolår 8 (Grant & Håkansson, 2006).



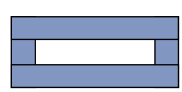
$2n+6$

figur 1



$3(n+2)-n$

figur 2



$2(n+2)+2$

figur 3

Vad krävs för att upptäcka elevers matematiska förmågor?

I sina examensarbeten visar de lärarstuderande hur elevernas förmågor kommer till uttryck i situationer där de arbetar med uppgifter som stimulerar till tankearbete och kommunikation. Vad är det då som krävs av en lärare som vill upptäcka och utveckla dessa förmågor vidare hos sina elever?

Kunskap om hur matematiska förmågor tar sig uttryck

Pedagogik för elever med förmåga och fallenhet för matematik innebär inte att vi ska drilla våra elever inom snäva områden eller att vi ska låta dem rasa vidare genom läromedlen. Här, liksom inom andra områden, tex idrott, gäller att det är viktigt med en bred och allsidig utveckling. Krutetskiis studie visar på bredden i den matematiska förmågan och pekar ut var vi kan söka efter dessa uttryck. ”Vi har alla en föreställning om vad begåvning är”, skriver Grant och Håkansson i sin rapport (2006) och vill med sin studie medvetandegöra läsaren om den egna synen på begreppet matematisk förmåga.

> *Det är viktigt att vi som lärare blir medvetna om hur komplext detta område är. Det är betydelsefullt för oss i vår yrkesroll att skapa oss ett förhållningssätt till vilka dessa begåvade elever är. Det är också angeläget att vi blir medvetna om vilka myter som finns så att vi inte omedvetet kategoriserar elever utifrån felaktiga föreställningar.*
>
> (sid 41)

Ett öppet och utforskande förhållningssätt inför elevernas svar

I examensarbetena finns inte bara exempel på hur elever elegant klarar av de matematiska utmaningarna som uppgifterna ställer dem inför. De visar också exempel på elever ibland hamnar fel och inte kommer fram till korrekta lösningar. Sådana exempel är också intressanta och visar hur svårt det kan vara att upptäcka matematiska förmågor. Om eleverna kommer fram till fel svar är det lätt att dra den ibland felaktiga slutsatsen att också tankarna är oriktiga. I studien som genomfördes i skolår 8 (Grant & Håkansson, 2006) ges exempel på hur en elev, Jörgen, prövar och förkastar flera möjliga generaliseringar av en given uppgift. Han pratar snabbt och i sitt resonemang rör han sig flexibelt mellan olika lösningsförslag som han sällan följer upp. Det ligger nära till hands att avfärda hans försök till lösningar som tillfälliga gissningar. Vid en närmare analys visar det sig emellertid att han faktiskt har kommit fram till den generella formeln för lösningen som han söker.

Goda matematikkunskaper

Det är i sådana sammanhang lärarens egen matematiska kompetens sätts på prov. I båda studierna diskuterar de lärarstuderande vad en lärare faktiskt behöver kunna i och om matematik för att förstå och stödja eleverna i deras matematiska utveckling.

> *Genom analysen av resultatet från vår undersökning blev vi medvetna om att det krävs gedigna matematikkunskaper för att fullfölja elevernas påbörjade lösningsförslag, vilket även Hagland et al påpekar i sin bok (2005:52). Vi har i vårt fall haft tillgång till vår handledare som i egenskap av matematiker hjälpt oss att fullfölja de utvecklingsbara lösningsförslagen. /…/ Om vi som lärare inte kan se vart elevernas tankar kan leda är det av största vikt att vi kan få hjälp med det.*
>
> (Grant & Håkansson, 2006).

Möjligheter till stöd och samverkan

Vad gör man då som lärare om man inte känner sig tillräckligt hemma i matematiken? Lärarstudenterna frågar var hjälp finns att få och tänker sig att NCM skulle kunna vara en resurs. En annan viktig resurs skulle kunna vara ett regionalt centrum i anslutning till de universitet och högskolor som har lärarutbildning dit lärare kunde vända sig för att få hjälp och stöd i sitt arbete. ”På dessa universitet och högskolor existerar det dessutom redan kopplingar till olika skolor genom den verksamhetsförlagda utbildningen.” (Grant & Håkansson, 2006).

Vi behöver också satsa på forskning med relevans för lärares arbete, där lärarstudenter, som här, kan vara delaktiga i forskningsprocessen tillsammans med seniora forskare. Och vi behöver satsa på samarbete mellan lärare över skolstadier. Lärarstudenterna som följde elever i skolår 3 – 4 konstaterar i sin rapport att de fann betydligt fler matematiska förmågor än de inledningsvis trodde.

> *Att elever i år 3 – 4 sitter inne med så mycket matematisk kunskap är fantastiskt att se. Däremot är det inte lika uppmuntrande att veta, att många av eleverna får vänta väldigt länge innan de får lära sig det som de redan nu är inne på.*
>
> (Gunnarsson & Hartonen, 2006, sid 29).

I studien använder tioåringar en slags prealgebra i sina resonemang. Det kommer troligen att dröja till skolår 7 eller 8 innan de får tillgång till algebraiska verktyg som kan hjälpa dem vidare. Med ett ökat samarbete mellan lärare och mellan lärare och forskare skulle det inte behöva vara så.

LITTERATUR

Grant, B. & Håkansson, J. (2006). *Hur finner vi elever med fallenhet för matematik? En fallstudie i år 8 om hur vi kan finna elever med matematisk fallenhet.* Examensarbete vid MSI, Växjö universitet. www.vxu.se/bib/diva/uppsatser/direktuppsmsi.htm

Gunnarsson, L. & Hartonen, A-K. (2006). *Barns förmågor i matematik – hur visar de sig hos 10-åringar i ett svenskt klassrum.* Examensarbete vid MSI, Växjö universitet. www.vxu.se/bib/diva/uppsatser/direktuppsmsi.htm

Hagland, K. Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago, Ill: The University of Chicago Press.

Wistedt, I. (2005). En förändrad syn på matematikbegåvningar? *Nämnaren 3*, 2005, 53 – 55.