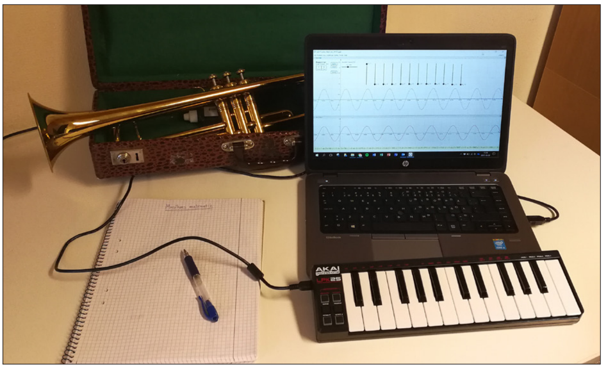
Johan Thorssell

Musikens matematik

Går det att lyssna på funktioner?

Artikelförfattaren har använt akustiska instrument och syntar i gymnasiets matematik för att introducera Fourieranalys. Vi får här smakprov från ett inspirerat lektionsupplägg i snittytan mellan fysik, matematik och musik som fått internationell spridning.



Musik finns överallt omkring oss och är en del av vår vardag. Musik engagerar och intresserar både lyssnare och utövare. Hur kan matematikundervisningen nyttja musikintresse och samtidigt fördjupa kunskaper inom såväl matematik och fysik som musik? I dagens musikskapande används datorer och tekniska hjälpmedel i allt större utsträckning. Kunskapen om hur ljud kan manipuleras och analyseras blir därmed viktigare. Den digitala framställningen av ljud – ljudsyntes – ger en intressant och betydelsefull förbindelse mellan matematik och musik.

Ett examensarbete som fortsätter att utvecklas

I mitt examensarbete på utbildningen *Civilingenjör och lärare* vid KTH och Stockholms universitet utvecklade jag en matematikaktivitet vid Vetenskapens Hus i Stockholm. Jag har under tre år fortsatt arbetet med att utveckla aktiviteten i mitt jobb som gymnasielärare på Polhemsgymnasiet i Göteborg. Idag får mina elever modellera sitt alldeles egna syntljud utifrån matematiska teorier samt lyssna och spela upp det via en klaviatur. Eleverna ges möjlighet att bredda sig kvantitativt och fördjupa sig kvalitativt inom matematik, fysik och musik.

Jag har alltid varit nyfiken på hur matematik kan användas för att beskriva mönster i världen omkring oss på ett vackert sätt. Jag blev själv mycket fascinerad och intresserad när jag läste Fourieranalys och musikakustik på universitetet och förstod att matematik kan hjälpa mig förstå ett av mina främsta intressen – musik – ännu mer. Min strävan är nu att mina elever ska känna liknande nyfikenhet, fascination och passion för matematik som jag gjorde under föreläsningarna i Fourieranalys, dvs när matematiken blir ett oumbärligt verktyg för att beskriva de mönster som bildar musik.

Matematikaktiviteten som jag har utvecklat handlar om en matematisk och fysikalisk förståelse för ljud i allmänhet och musikaliska toner i synnerhet.

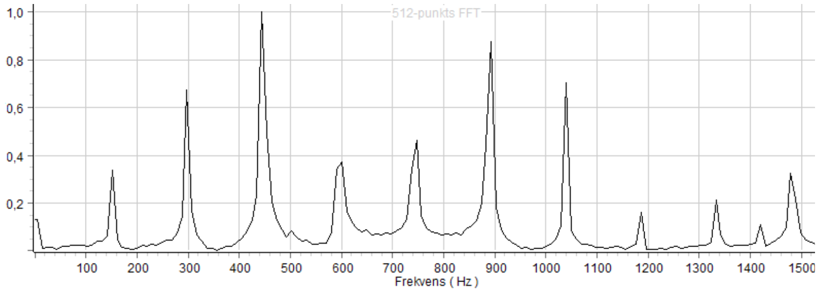
Aktiviteten lämpar sig väl i gymnasiekurserna *Matematik 4* och *Fysik 2* med många synergieffekter som följd. Eleverna får grundläggande kunskaper inom ljudsyntes och addition av sinusfunktioner utifrån den matematiska och fysikaliska teorin om ljud, akustik och mekaniska vågor. Tyngdpunkten i matematikaktiviteten ligger i två frågor:

1. Varför låter musikinstrument olika, även om samma ton spelas?
2. Kan vi med kunskap om ljud skapa ett alldeles eget digitalt instrument, en synt?

Eleverna får som avslutning möjlighet att provspela egna melodier eller ackord med det ljud som de själva skapat utifrån matematiska funktioner.

Eleverna analyserar olika musikinstrument

Alla elevgrupper får en stämgaffel att börja sin undersökning med. Stämgaffeln ger ifrån sig en av de grundläggande svängningarna, endast en grundton utan övertoner. Eleverna får analysera tonen från stämgaffeln med hjälp av mikrofon och dator som visar frekvensspektrumet. Eleverna får sedan analysera olika musikinstruments toner och jämföra med stämgaffeln. I klassrummet finns musikinstrument som gitarrer, visslor, trumpet, fiol, klockspel och melodika. De kan även testa att själva sjunga eller vissla en ton. Hittar de några samband och mönster? Kan de beskriva sambanden med matematik?



Eleverna finner att instrument och sångröst innehåller fler frekvenser än vad stämgaffeln gör. De ser också ett mönster mellan frekvenserna och hittar förhållandet mellan den första grundtonen och de andra tonerna, övertonerna. Övertonerna är en multipel av grundtonen. Förklaringen till varför det är så tar vi upp på en fysiklektion. Frågan om varför musikinstrument låter olika, även om samma ton spelas, har eleverna ännu inget svar på.

Fourieranalys, en modell för periodiska svängningar

På 1700-talet gav studiet av vågekvationen för en svängande sträng upphov till metoder för lösningar av partiella differentialekvationer och ökad förståelse för rörelsen hos en sträng. Brook Taylor, Leonhard Euler, Jean d'Alembert, Johan Bernoulli och hans son Daniel Bernoulli är några framstående matematiker som studerat musikinstrument, vågekvationen och dess lösningsmetoder. Jean-Baptiste Fourier var sedan den matematiker som slutligen samlade ihop och kunde knyta samman de matematiska verktyg som behövdes för att sammanställa teorin som bland annat beskriver musikaliska toner. I korthet handlar Fourieranalys om att utifrån en mix av komponenter hitta de ingående beståndsdelarna. Vi skulle kunna säga att vi med Fourieranalys får verktyg och metoder att ta fram receptet till en maträtt genom att endast analysera den färdiga maträtten. Det vi uppfattar som en musikalisk ton är då luftens tryckförändringar förändras enligt ett periodiskt mönster. Den matematiska teorin, Fourieranalys och Fourierserier, visar att periodiska funktioner kan skrivas som serier av sinus- och cosinusfunktioner. Alltså att varje periodisk våg kan beskrivas som summan av enklare svängningar. Om jag exempelvis skulle spela in din sångröst en sekund skulle din rösts Fourierserie kunna se ut så här:

$$röst = sin(x) + \frac{1}{10}sin(2x) + \frac{1}{100}sin(3x) + \cdots$$

Allmänt om vi har en periodisk funktion f med period T gäller att

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t)$$

där a_0, a_n och b_n är Fourierkonstanter och ges för $n = 1, 2, 3 \ldots$ av

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,dt$$

Den periodiska funktionen kan således uttryckas med en konstantterm och summan av sinus- och cosinustermer. Sinus- och cosinustermerna ger upphov till frekvenser som är multiplar av grundfrekvensen. Precis det som eleverna har upptäckt genom sin undersökning av de olika musikinstrumenten. Fourierkonstanterna a_n och b_n står som amplituder till varje svängning och avgör hur stor andel av varje frekvens som finns representerad i den periodiska funktionen.

Det är av intresse att kunna beskriva periodiska svängningar eftersom det vi uppfattar som en musikalisk ton består av sådana. Denna tons klangfärg, det vill säga det som gör att vi känner igen en röst eller ett instrument, beror av storleken på Fourierkonstanterna som i sin tur bestämmer amplituden på övertonerna. Fourierserier ger oss matematiska verktyg att beskriva en musikalisk ton.

Fourieranalys på gymnasiet – vågornas grammatik

För att kunna undervisa om så pass komplicerade matematiska resonemang som dessa på gymnasienivå, måste urvalet vara noggrant avgränsat och anpassat efter målgruppen. Även upplägget och pedagogiken måste vara noga uttänkt. Jag har hittat stor inspiration i boken *Who is Fourier? A mathematical adventure*. I boken finns ett intressant pedagogiskt upplägg med en jämförelse mellan olika smak på grönsaksjuicer, och förståelsen och förklaringen till hur olika andelar av enkla svängningar ger upphov till olika ljudupplevelser.

Antag att vi har tre grönsaksjuicer som innehåller samma sorts ingredienser, låt säga tomat, morot, selleri och kål. Trots att de innehåller samma sorts grönsaker smakar dessa juicer olika. För att få en förståelse kring varför de smakar olika kan vi undersöka andelarna av de olika grönsakerna i de tre juicerna. Vi kan skriva det som matematiska formler och göra en liknelse med Fourierserier.

Juice 1: 200 ml = 50 ml *tomat* + 30 ml *morot* + 40 ml *selleri* + 80 ml *kål*

Juice 2: 200 ml = 85 ml *tomat* + 35 ml *morot* + 30 ml *selleri* + 50 ml *kål*

Juice 3: 200 ml = 40 ml *tomat* + 55 ml *morot* + 70 ml *selleri* + 35 ml *kål*

Vi ser här att juicerna har olika mängd av beståndsdelarna. Därför smakar juicerna olika. Även om vi använder samma sorts grönsaker att göra juice på ger olika andelar av grönsakerna upphov till olika smak. Grönsaksandelarna är avgörande för det slutgiltiga smaken. Liknelsen gäller för musikaliska toner. Med andra ord, om vi använder samma grundläggande vågor ger olika andelar, i det fallet amplituderna, upphov till olika komplicerade vågor, toner. Fourieranalys hjälper oss att matematiskt hitta dessa enkla vågor.

$$\begin{aligned}\text{Komplicerad våg} &= \text{enkel våg } 1 + \\ &+ \text{enkel våg } 2 + \\ &+ \text{enkel våg } 3 + \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

En musikalisk ton $$f(x) = \underbrace{1\sin(x)}_{\textit{Grundton}} + \underbrace{0.5\sin(2x) + 0.3\sin(3x) + 0.7\sin(4x)}_{\textit{Övertoner}}$$

En annan musikalisk ton $$f(x) = \underbrace{0.7\sin(x)}_{\textit{Grundton}} + \underbrace{0.4\sin(2x) + 0.2\sin(3x) + 0.1\sin(4x)}_{\textit{Övertoner}}$$

Precis som med juicerna kan vi skriva en musikalisk ton som en matematisk formel med olika sinustermer som representerar beståndsdelarna. Det är dessa andelar av övertoner som ger en musikalisk ton sitt karaktäristiska ljud. En ton från ett piano har alltså ett annat övertonsspektrum än samma ton från en trumpet. Elever uppskattar den relativt enkla beskrivningen och ser fram emot att använda kunskaperna för att göra sitt eget speciella ljud. Genom förståelse om Fourierserier har vi nu grammatiken för att beskriva musikaliska toner.

Additiv ljudsyntes

Om vi nu använder resonemanget omvänt så kan vi bygga upp en mer komplicerad ljudvåg genom att generera och summera enklare vågor. Vi kan då också se till att de ingående svängningarnas frekvenser förhåller sig som en multipel av grundtonen till varandra, då får vi en periodisk våg – en musikalisk ton. Detta förfarande att addera sinusvågor till varandra kallas för additiv ljudsyntes. Som ett exempel kan vi sätta grundtonen till 100 Hz och får då övertonerna till:

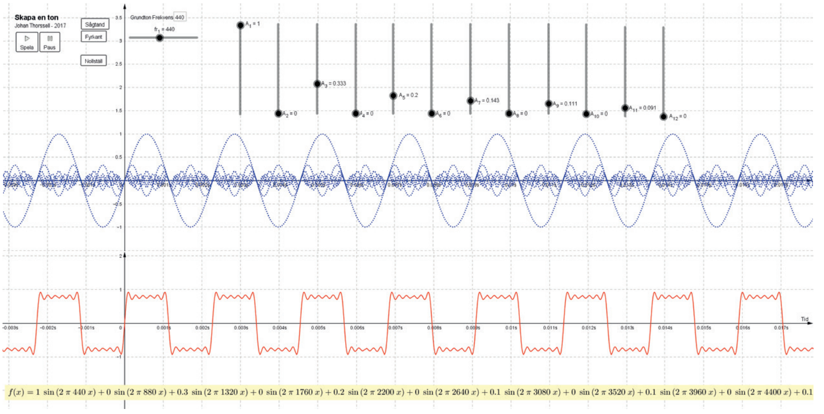
$$\begin{aligned}f_1 &= 100 \text{ Hz} \\ f_2 &= 2f_1 = 200 \text{ Hz} \\ f_3 &= 3f_1 = 300 \text{ Hz} \\ f_4 &= 4f_1 = 400 \text{ Hz}\end{aligned}$$

och så vidare.

Genom att bestämma amplituderna på grundton och varje enskild överton får vi en periodisk våg med ett visst karakteristiskt ljud. Vi kan använda additiv ljudsyntes för att efterlikna musikinstrument eller för att skapa nya sorters instrument.

Skapa musik med Geogebra

De dynamiska förändringarna visualiseras och görs även hörbara genom Geogebra. I applikationen som jag har utvecklat bestäms en grundton. Utifrån grundtonen skapas elva övertoner med frekvenser som multipel av grundton. Med hjälp av de dynamiska reglagen ”glidare” kan amplituden för varje enskild överton bestämmas och ändras. I graffönstret visas de ingående sinusvågornas funktioner (blåa) samt summan av alla vågornas funktion (röd). Vid en ändring av frekvens eller amplitud sker en omedelbar ändring av funktionernas grafer. Eleverna kan på så sätt både höra och se förändringar samtidigt som de ändrar en parameter i övertonsspektrumet. De modellerar sitt eget digitala instrument.



Skärmavbildning som visar det grafiska gränssnittet i Geogebra. Överst amplitudkontroll av övertoner och åskådliggörande av sinusfunktionerna (blå grafer). Under visas den sammanslagna ljudvågen (röd graf).

När eleverna valt sina övertoner efter egna preferenser kan de med hjälp av en MIDI-keyboard kopplad till sin dator spela och lyssna till sin alldeles egna matematiska funktion. Det är frekvensen på grundton och övertoner som ändras vid olika tangenttryckningar. Amplituderna på grundton och övertoner bibehålls enligt de av eleverna inställda egenskaperna. Eleverna får börja med att modellera en stämgaffel, det vill säga en grundton utan övertoner. Eleverna testar att spela och kommenterar resultatet, ”det låter ju som en flöjt om vi spelar toner med höga frekvenser, och som en bas om vi spelar med låga frekvenser”.

Om övertonerna väljs enligt den harmoniska serien, med amplitud för grundton till 1, första överton till 1/2, andra överton till 1/3, och så vidare, erhålls en sågtandsvåg. Sågtandsvågen är en av de grundläggande vågorna i moderna syntinstrument. Vågen liknar en såg till formen och låter likt ett stråkinstrument. Om eleverna väljer att endast de jämna övertonerna (2:a, 4:e, osv) i den harmoniska serien ljuda får de en fyrkantsvåg som är en annan grundläggande våg i syntar.

Ljudmässigt låter denna våg som en pipa som är öppen i ena änden, likt en klarinett. Elever kommenterar resultatet av olika amplitudvärden på övertonerna: ”Ser du, det blir alltid en periodisk våg”. Genom en ökad matematisk förståelse av ljud och musikinstrument har eleverna fått grunderna till hur en digital synt fungerar. De har även fått viss inblick och kunskap om Fourieranalys.

Musik och matematik som universella språk

Via Polhemsgymnasiets internationella matematikutbyte, ett elev- och lärarprojekt, med kinesiska *Shanghai information technology college, SITC*, har jag fått tillfälle att genomföra musik- och matematikaktiviteten med en klass på plats i Shanghai. Jag möttes av stor uppskattning av de kinesiska lärarna som verkligen såg fördelar med att arbeta ämnesövergripande och samtidigt få ett djup i de matematiska kunskaperna.

En insikt som jag tar med mig från resan till Shanghai är att både matematik och musik är universella språk som möjliggör kommunikation över både språk- och kulturgränser. Kombinationen matematik och musik blir ett äventyr för eleverna såväl kunskapsmässigt som kulturellt. En resa där summan av delarna bildar en större helhet. Precis som när Fourierseriens ingående svängningar summeras och bildar vacker musik.

Musikens matematik i Shanghai 2016.

LITTERATUR OCH LÄNKAR

Benson, D. (2006). *Music: A Mathematical Offering.* Cambridge University Press.

Transnational College of LEX. (1995). *Who is Fourier? A mathematical adventure.* Language Research Foundation.

Thorssell, J. (2014). *Utformning av laboration inom Fourieranalys vid Vetenskapens Hus : Musikens matematik – En matematisk förståelse av ljud- och musikinstrument* (Examensarbete 30 hp). Hämtad 20171024 från http://www.diva-portal.se/smash/record.jsf?pid=diva2:703930

Additiv ljudsyntes: https://en.wikibooks.org/wiki/Sound_Synthesis_Theory/Additive_Synthesis

Polhemsgymnasiets internationella matematiksamarbete med skola i Shanghai: https://sites.google.com/skola.goteborg.se/shanghaipolhem