

Gruppera mera!

Dubbelt och hälften är vanliga inslag i den tidiga matematikundervisningen. Elever ska ringa in hälften av något eller rita så att det blir dubbelt så många. Hur det ser ut i läroböcker och hur läraren kan omformulera uppgifter så att de kan vara till stöd för eleverna att djupare förstå begreppen och senare utvidga dem till proportionella samband diskuteras i denna artikel.

I de lägre årskurserna i grundskolan finns det en vana att undervisa om begreppen hälften och dubbelt. När det centrala innehållet *Samband och förändring* kom så översatte många av oss det till att handla om undervisning om detta. Men området Samband och förändring är så mycket mer än hälften och dubbelt. I Matematiklyftsmodulen Samband och förändring har vi presenterat delar av vad området kan innebära, men av utrymmesskäl får inte allt plats. I denna artikel tar vi upp hur uppgifter från bland annat läroböcker kan leda till olika lärandeaktiviteter. Vi tar också upp den potential uppgifter har för att utveckla proportionellt tänkande.

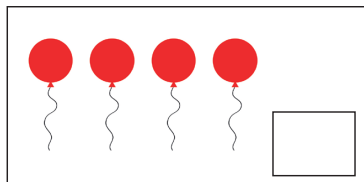
Vad är då samband och förändring? Om vi startar i det centrala innehållet i Lgr 11 får vi veta att det handlar om:

Olika proportionella samband, däribland dubbelt och hälften.

Vad innebär detta egentligen? Däribland dubbelt och hälften, men vad är däribland? Och vad innebär det att hälften och dubbelt är proportionella samband? När vi i modularbetet arbetade med dessa frågeställningar gick vi igenom läromedel för att se hur innehållet tolkats i dessa. Det vi kom fram till är att variationen är stor och att fokus i uppgifter inte ligger på att utveckla elevernas kunskaper inom samband och förändring utan snarare på addition och subtraktion.

Av de exempel som behandlar samband och förändring har vi framförallt hittat uppgifter där aktiviteterna varierar mellan att eleven ska ringa in rätt antal, färglägga eller själva rita rätt antal. Uppgifterna uppmanar att ringa in dubbelt så många eller att rita hälften av ett antal.

Skriv antalet



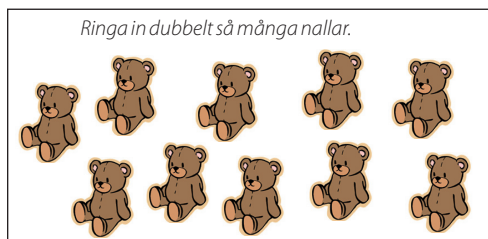
Rita hälften så många. Skriv antalet.



Andra typer av uppgifter behandlar del av helhet: *Skriv talet som är dubbelt så stort.* I denna typ av uppgift ska eleverna om det står 4 skriva talet 8.

Det vi över lag saknar i läromedlens uppgifter är frågeställningar som lyfter det matematiska innehållet i det centrala innehållet Samband och förändring.

Rita en ring runt dubbelt så många.



"... en aktivitet
föregår förståelsen
av ett begrepp"

Uppgiften här ovan *kan* träna begreppet dubbelt men det beror på hur eleven löser den. Uppgiften kan lösas med addition utan att eleven tar hänsyn till vare sig begreppet dubbelt eller till något samband eller någon förändring. Enligt Anna Sford är det oftast så att en aktivitet föregår förståelsen av ett begrepp.

Använder vi detta resonemang i en uppgift där det är samband och förändring som ska tränas, så är det den aktiviteten som ska vara i fokus. I uppgiften ovan kan fokus förskjutas med frågan: *Hur vet du att det är dubbelt så många som du har ringat in?* Eleven ges då möjlighet att uttala sig om varför den har ringat in ett visst antal. Exempel på elevsvar:

Elin: Man tar först fyra och sen måste man lägga till fyra igen för att det ska bli dubbelt.

Nils: Det måste bli åtta stycken för åtta är ju lika mycket som två fyror.

Elin visar i sitt svar att hon använder ett additivt tänkande, att fyra plus fyra är lika med åtta. Nils uttalande kan bygga på ett additivt tänkande, men det kan också vara ett multiplikativt tänkande. Genom att ställa frågor kan vi ta reda på mer om hur de tänker. Att tänka att det behövs två fyror kan innebära att Nils ser talet åtta som två grupper om fyra. I en fortsättning av samtalet med Nils kan frågan vara hur många grupper om fyra som behövs för att få tolv nallar och höra om han svarar additivt "4 + 4 + 4" eller multiplikativt "tre grupper om fyra". Ett fortsatt samtal med Elin bör istället inrikta sig på att se om hon kan uttrycka dubbelt på ett annat sätt än med addition. Genom att ändra innehåll i en uppgift eller ställa frågor till eleven kan en uppgift som från början handlade om dubbelt och hälften också beröra andra samband. Frågar vi eleverna *Om det var två nallar från början och det sedan är åtta stycken, hur har antalet nallar förändrats?* kan det leda till att en elev säger att antalet nallar blivit sex fler eftersom två plus sex är lika med åtta. Detta är visserligen ett korrekt svar, men för läraren är det då viktigt att fortsätta diskussionen för att försöka få eleverna att uttrycka sambandet mellan två och åtta. Svar man kan förvänta sig är av typen att två plus två plus två plus två är lika med åtta, eftersom yngre elever ofta väljer addition när de beskriver något utifrån ett räknesätt. Då kan man leda in elevernas resonemang på samband, det vill säga att antalet nallar i det här fallet är fyra gånger fler.

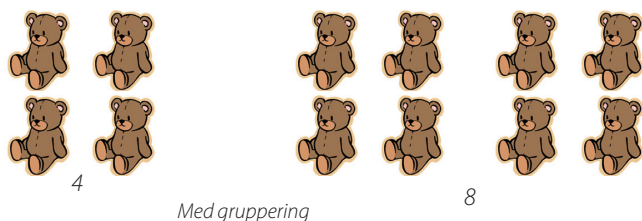
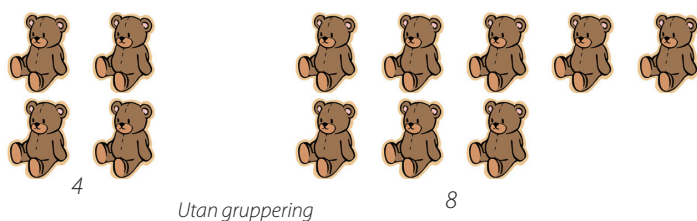
Skillnaden mellan att resonera om samband utifrån addition respektive multiplikation är att multiplikation är utvecklingsbart för ett proportionellt tänkande. I uppgiften med nallarna kan man parallellt med att man pratar om att åtta är dubbelt så mycket som fyra beröra att åtta är två gånger fyra, eller på motsvarande sätt om vi utgår från två nallar att åtta är lika med fyra gånger två nallar.

Utveckla proportionellt tänkande

Bilden är viktig för att lära sig att se grupperingar som kan leda till multiplikativt tänkande. I nallebilden till uppgiften ovan får eleven ingen ledning till hur den kan tänka. Nallarna till vänster och till höger är inte ordnade för att ge visuellt stöd för gruppering.

Bilden kan tydliggöra det som tas upp i undervisningen. Matematikundervisning handlar till en stor del om att hjälpa eleverna att utveckla representationer av exempelvis tal och geometriska former. En representation som visar ett multiplikativt mönster kan hjälpa eleverna att se grupperingar och därmed utveckla deras multiplikativa tänkande.

Nedan ser vi bilder som visar förhållandet mellan fyra och åtta. Den övre ger inte någon visuell hjälp eller struktur för att jämföra sambandet mellan nallarna till vänster och till höger. För att undersöka sambandet kan en elev behöva räkna antalet nallar och kommer kanske inte ens fram till att antalet till höger är dubbelt så många som antalet till vänster.



I den nedre bilden ser vi istället hur grupperingen av de fyra nallarna återkommer i bilden av de åtta nallarna. Grupperingen av nallarna och det mönster som denna gruppering visar kan hjälpa eleverna att få syn på sambandet mellan talen 4 och 8, att åtta förhåller sig till fyra som dubbelt så många som fyra.

Det är viktigt att tänka på vilka bilder eleverna får att utgå ifrån i uppgifter eftersom dessa i sin tur inverkar på vilken aktivitet som skapas. Vill vi att de ska räkna antal eller vill vi att de ska kunna se samband?

Proportionella samband

Grupperingar är alltså ett kraftfullt sätt för att representera samband för begreppen dubbelt och hälften. I några av de läromedel som vi har undersökt har vi hittat ett fåtal bilder som visar grupperingar, ofta tillsammans med bilder som inte är grupperade. Uppgifterna bjuder därmed in till andra aktiviteter istället för att ha fokus på att utveckla elevernas proportionella tänkande.

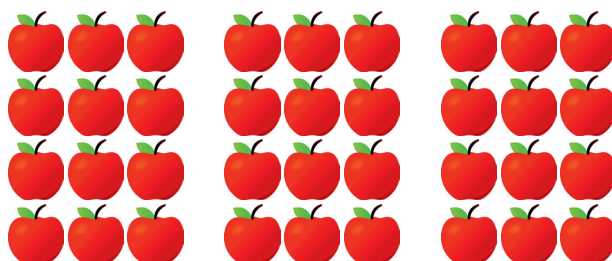
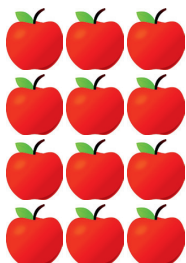
Färglägg hälften



Färglägg hälften



Proportionella samband handlar inte bara om hälften och dubbelt. Ordet *däribland* i det centrala innehållet indikerar just detta. Hälften och dubbelt är bara ett första exempel på ett samband och hur ett antal kan förändras om detta halveras eller dubbleras. Med äppelbilden här till vänster som utgångspunkt kan vi diskutera både dubbelt så många äpplen som hälften så många äpplen. Men vi skulle också med stöd av bilden kunna diskutera en tredjedel av äpplena, en fjärdedel av äpplena, tre gånger så många äpplen, fyra gånger så många och så vidare. För att se delar av hela antalet äpplen kan raderna i bilden vara en utgångspunkt, en horisontell rad utgör en fjärdedel och en vertikal rad utgör en tredjedel. För att se fler helheter av äpplena kan hela bilden användas. I bilden till nedan är äpplena tre gånger så många.



Ett ändrat fokus

Vår slutsats är att det är svårt att hitta uppgifter i läromedel som tar upp det centrala innehållet "proportionella samband, däribland dubbelt och hälften". Uppgifterna behandlar snarare addition än proportionellt tänkande. Det vi vill visa i den här artikeln är hur lärare genom att ändra fokus på aktiviteten i uppgiften kan använda dessa uppgifter så att de i stället tränar proportionellt tänkande. Ytterligare stöd för vad samband och förändring kan innebära finns i Skolverkets *Bedömning för lärande i matematik*. Där beskrivs vad

bedömningen behöver fokusera vad gäller både förmågorna och det centrala innehållet och detta kan användas som underlag för planering av undervisning:

- ◊ Enkla proportionella samband, t ex hälften och dubbelt och fyra gånger så mycket.
- ◊ Att dubbelt innebär en multiplikation med 2 och hälften division med 2.
- ◊ Använder hälften/dubbelt som en del av helhet (hälften av kakan) som del av antal (jag har dubbelt så många byggbitar som hon har).
- ◊ Uppfattar att en sträcka är dubbelt så lång som en annan sträcka.
- ◊ Redovisar sina tankar om enkla proportionella samband med olika uttrycksformer, t ex i handling med konkret material, bilder, ord och/eller matematiska symboler.
- ◊ Ställer och besvarar frågor om enkla proportionella samband.

Vad kan det leda till?

Nu kanske någon funderar på varför det spelar roll om man räknar fyra plus fyra eller två gånger fyra när resultatet ändå blir detsamma. Om vi ska beräkna hur mycket två hg champinjoner kostar om ett hg kostar nio kronor, så kan beräkningen ske med addition eller multiplikation. Om vi istället beräknar vad två och ett halvt hg kostar kan vi antingen addera priset för två hg och priset för ett halvt hg eller kan vi beräkna 2,5 multiplicerat med nio kronor. Men när vi handlar olika varor i lösvikt är det sällan som påsen med grönsaker eller frukt väger exakt hela antal hg eller kg, utan vikten kan till exempel vara 2,351 kg – och priset något ojämnt som 59,90 kr/kg. Vi kan naturligtvis beräkna vad ett tiondels kg, ett hundradels kg och ett tusendels kg kostar, beräkna vad tre tiondels kg kostar och så vidare och slutligen addera alla delsummor – men om vi tidigare arbetat medvetet med multiplikation i den här typen av uppgifter underlättar det för eleven, på sikt, att förstå att multiplikation är en lämplig metod i det här sammanhanget och att $2,351 \cdot 59,90$ kommer att ge det efterfrågade svaret. Målet är att träna elevernas proportionella tänkande.

LITTERATUR

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1–3.

Skolverket (2014). *Bedömning för lärande i matematik*. Hämtad 20150611 www.skolverket.se/bedomning/bedomning/bedomningsstod/matematik/for-larande-1.196206