John Mason

Att använda barns förmågor

Alla barn kommer till skolan utrustade med fantastiska mentala förmågor, som kan användas till matematiskt tänkande. I artikeln diskuteras hur lärare på ett kreativt och effektivt sätt kan utnyttja dessa förmågor.

Hur kan man utnyttja barns fantastiska mentala förmågor till matematiskt tänkande i undervisningen? Jag börjar med att beskriva de fenomen jag vill studera och att leta efter exempel på dessa från min egen erfarenhet. Därefter gör jag övningsuppgifter för att se om andra lägger märke till samma saker som jag. Genom att gradvis förfina och anpassa uppgifterna, utifrån gjorda erfarenheter och från studier av relevant litteratur, kan jag både utvidga min egen erfarenhet och erbjuda erfarenheter åt andra. Det kan bidra till att utveckla en större känslighet och medvetenhet för barns möjligheter och i förlängningen påverka den framtida praktiken. Under utvecklingen av övningsuppgifter beaktas aktiviteter och strategier som eleverna skulle kunna ha nytta av.

Detta är en sammanfattande beskrivning av de grundläggande förmågor som alla människor besitter och av några genomgripande matematiska idéer. Översikten följs av ett avsnitt med exempel på uppgifter, där möjliga dimensioner av variation, vilka förmågor som kan betonas samt vilka matematiska idéer som eleverna kan möta diskuteras. Hela framställningen inriktas mot frågeställningen *Hur kan jag få eleverna att använda sina egna förmågor?*

John Mason är matematikdidaktiker vid Open University i England

Barns förmågor

Alla barn som börjar skolan har redan visat sig besitta fantastiska förmågor. De har lyckats tyda alla de ljud som strömmat emot dem från vuxna och även lärt sig skapa egna ljud som andra finner meningsfulla. De har lärt sig att koordinera sina muskler så att de kan ta sig fram, ta upp och ställa tillbaka saker. De har kommit underfund med att vissa saker ramlar om de inte stöttas upp, att vissa saker är tunga och andra lätta, till och med så lätta att de flyger iväg om man inte håller i dem. De har genomskådat att det finns ett mönster i när det är ljust och mörkt, i vuxnas närvaro och frånvaro. De har lärt sig känna igen människor trots att de ändrar hårfärg, kläder, glasögon osv. Faktiskt uppvisar de en häpnadsväckande intelligens, som både kan urskilja och särskilja. De har dessutom begynnande teorier om människor, t ex för när de är lyckliga, ledsna, irriterade, arga osv.

Så kommer de till skolan. Där försöker vi formalisera en del av de saker de kan intuitivt (tala blir skriva, sortering och uppräkning blir tal och siffror etc). I den har processen lyckas vi inte alltid utnyttja elevernas förmågor på det vis vi önskar, vilket gör att en del barn får för sig att deras förmågor inte duger i skolan.

Föreställningar och uttryck

Barn har förmåga att föreställa sig saker som inte är fysiskt närvarande samt att i tanken manipulera med dessa. Föreställningarna kan ta form i bilder eller ljud, vara kinestetiska eller bara en slags ”känsla” av något, eller kanske en blandning av dessa. De har dessutom förmåga att uttrycka sina föreställningar, även om det tar ett tag innan de förstår att de inte delar föreställningarna med de personer de talar med. De uttrycker sig med verbalt språk (krav, önskningar, anvisningar, beskrivningar, småprat) men också med teckningar, rörelser etc. Det är verkligen en balansgång att uppmuntra barn att uttrycka sig och samtidigt ha kontroll när trettiotalet barn vill komma till tals inom ett begränsat utrymme. Förmågan att föreställa sig saker visar sig i små barns lust till berättelser och när de blir äldre genom läsning, såpoperor och andra dramatiseringar, samt genom att utväxla kommentarer om gemensamma bekanta och kändisar. Förmågan att uttrycka sig kan visa sig i dans och i idrott, i konst och teater, i skrik, i samtal och skryt. I matematiken kan det ske genom konstruktion av föremål, poster-utställningar, sånger och danser, elektroniska objekt med hjälp av dator eller med ord och symboler på papper.

Specialisering och generalisering

När vi möter något generellt prövar vi det mot våra tidigare erfarenheter, mot några specifika fall som vi är bekanta med. Avsikten med att pröva specialfall i matematiken är att försöka förstå innebörden av en generalisering och för att se om den håller. Det är också ett sätt att hitta mönster som förklarar varför en generalisering alltid måste gälla. Den fundamentala betydelsen ligger i *måste alltid*. Att generalisera är något vi gör hela tiden, vilket visar sig när våra förväntningar kommer på skam och när vi blir överraskade. Att vi blir överraskade tyder på att vi hade förväntat oss något annat, dvs att vi hade förutsagt vad som skulle ske baserat på en generalisering utifrån tidigare erfarenheter. Små barn kopplar tidigt ihop olika röster med rätt person och lär sig känna igen vem som kommer, på ljudet av stegen. Detta är generaliseringar. På samma sätt är språk en generalisering. Substantiv är ofta beteckningar för en hel klass av objekt, mer sällan för specifika objekt (personnamn är undantag). Till exempel refererar stol, kopp och sked inte till specifika objekt utan till breda kategorier av föremål.

När barn börjar skolan utmanas de tidigt att urskilja vad som är gemensamt hos tre pennor, tre kulor och tre barn och samtidigt bortse från skillnader i storlek, färg etc. Denna *trehet* hos tre föremål är en generalisering och siffran 3 är en beteckning för den abstraktionen. Sedan förväntar vi oss att barn snabbt ska bli så förtrogna med räkneorden i talraden att de *förväntar sig* att efter 1, 2, 3, 4 kommer 5.

Genom att introducera talfakta strävar vi efter förtrogenhet och färdighet med tal upp till tio innan vi fortsätter med addition och subtraktion med större tal. Vi förväntar oss naturligtvis inte att någon ska memorera alla tänkbara två- och tresiffriga additioner och subtraktioner, men självklart vill vi att eleverna ska kunna utföra vilken som helst av dessa. Här finns en dold generalisering. Från specifika beräkningar förväntas eleverna generalisera en teknik – en teknik som är mycket besvärlig att beskriva fullständigt och detaljerat med ord! Det är mycket lättare att närma sig och lära sig tekniken genom att praktisera den.

När barnen blir äldre möter de allt fler metoder av olika slag och vi börjar förvänta oss att de ska kunna beskriva dessa, samt uttrycka med ord, bilder och symboler olika mönster som de upptäcker. Detta är grunden till algebraiskt tänkande – att kunna uttrycka generaliseringar på många olika sätt och i många olika kontexter.

Förutsäga och övertyga

Att påstå något om ett mönster man upptäckt är en sak. Att kunna motivera påståendet så att andra blir övertygade är en annan. Att kunna urskilja och särskilja på ett sätt som vuxna finner meningsfullt är något som elever försöker lära sig. Dessutom måste de lära sig att motivera varför upptäckterna med tillhörande förutsägelser är meningsfulla. Små barn uppvisar dessa förmågor i mindre utvecklad form. Inom flera akademiska discipliner ställs det höga krav på att kunna motivera och övertyga och dessa förmågor används och utvecklas i skolan.

Ordna och klassificera

Att sätta saker i en bestämd ordning, att jämföra och att leta efter likheter och skillnader är aktiviteter man kan se i små barns lekar, i tonåringars samlande och i matematikens struktur. Vi klarar oss som individer tack vare att vi kan klassificera, dvs att vi kan urskilja och känna igen likheter och skillnader genom att lyfta fram vissa egenskaper och bortse ifrån andra. Denna förmåga, att *betona och ignorera* (stress-and-ignore) samtidigt, ligger bakom de andra förmågorna som nämnts. Den är grundläggande för att kunna specialisera och generalisera, för att föreställa sig och uttrycka saker samt för att ordna och klassificera.

Dessa förmågor är inte bara användbara när man börjar i skolan. De utgör kärnan i matematiken och de är speciellt viktiga för det som senare kommer att kallas skolalgebra. På samma sätt som dessa naturliga förmågor används för att begripa sig på omgivningen i allmänhet och matematiken i synnerhet, finns det genomgripande matematiska idéer som bidrar till att knyta ihop till synes oförenliga områden.

Matematiska idéer och teman

Det finns ett antal idéer och teman som genomsyrar i stort sett all matematisk aktivitet. Dessa medverkar till att skapa en känsla av samband mellan delar av matematiken som annars verkar ha lite gemensamt.

Göra och återställa

I de fall man kan finna svaret på en uppgift är det fruktbart att fråga sig själv: ”om jag istället hade fått svaret skulle jag då kunnat återskapa frågan?” Till exempel är $3 \times 4 = ?$ relativt trivial jämfört med uppgiften $12 = ? \times ?$ vilken leder till faktorisering och primtal. Att leta efter ett tal som ger resten 1 vid division med 7 är en sak men att hitta och beskriva alla dessa tal är en annan. Att hitta det minsta tal som både 6 och 10 delar är en sak men att hitta alla talpar för vilka 30 är det minsta tal de båda delar är en annan. Om någon utför ett antal beräkningar på ett tal, som de inte avslöjar för dig, och talar om slutresultatet, skulle du kunna återskapa talet utifrån de gjorda beräkningarna? Om operationerna kan omvändas så kan det ursprungliga talet återskapas och detta är grunden för ekvationslösning. Att *Göra* och att *Återställa* kan vara upphov till en mängd matematisk kreativitet som ofta leder till nya idéer och metoder.

Invarians i variationen

De flesta matematiska fakta är påståenden om något som är oförändrat medan något annat ändras. Summan av vinklarna i en plan triangel är alltid 180 grader (oförändrat/invariant) oberoende av hur triangelns utseende varierar. Produkten av två udda tal är alltid udda oavsett vilka tal som väljs. Varje gång man stöter på ett påstående är det angeläget att fråga sig *vad* som kan få lov att ändras utan att det invarianta förändras Uppmärksamheten riktas alltför ofta mot det invarianta snarare än mot vilka variationer av olika egenskaper som är tillåten.

Genom att fråga sig själv vad som kan förändras i en enskild övning, problem eller uppgift, utan att angreppssätt eller metod måste ändras, öppnar man för en dimension av möjlig variation (en term som används av Marton & Booth, 1997, tämligen generellt och av Runesson, 1999 och 2001, specifikt inom matematik, se även Mason, 2002). Genom att fråga vilken sorts förändring i en sådan dimension som är tillåten, kan man bli medveten om räckvidden av den tillåtna förändringen, vilket i sin tur leder till begreppen variabel och parameter. Tillsammans kan dessa två idéer användas för att utveckla elevövningar från en sekvens av uppgifter, som arbetas igenom en i taget, till att bli en ingång till generalisering (a doorway into a domain of generality).

Öppenhet och begränsning

De flesta matematiska problem börjar med något (kanske ett tal eller en figur) som är obestämt, oklart eller godtyckligt. Sedan lägger man på diverse begränsningar. Med varje ny begränsning inställer sig frågan om öppenheten fortfarande är tillräcklig för att några objekt ska kunna uppfylla kraven. På det viset är ekvationer och olikheter exempel på begränsningar på en initial öppenhet (betrakta ett godtyckligt tal; ett tal mellan 20 och 30; ett primtal). Matematik är ett område där effekterna av olika begränsningar analyseras. Genom att utgå från ett problem och först betrakta det som en helt öppen konstruktionsuppgift, för att därefter lägga på begränsningar, kan den mest rutinartade övning bli kreativ och skapande.

Utvidgning / insnävning av innebörd

De första tal barn möter är de naturliga talen 1, 2, 3, ... Senare möter de talet noll, de negativa talen, bråk och decimaltal. Ordet *tal* utvidgas till att allt eftersom omfatta fler och fler idéer.

Även när vi inte känner något i sin helhet så har vi en tendens att vilja sätta en etikett på det. På det viset betecknar π ett bestämt förhållande (omkretsens förhållande till diametern i vilken cirkel som helst – lägg märke till invariansen och variationen). Vi använder beteckningen π för detta tal, fastän vi i det decimala talsystemet endast känner till ett, visserligen stort men, ändligt antal decimaler. Ofta associerar vi egenskaper hos ett tal till beteckningen, även när beteckningen inte är explicit ($\sqrt{3}$ betecknar något som är positivt och har kvadraten 3. Det är endast känt från sina egenskaper). Således utvidgar vi innebörden hos ord och symboler när vi lär oss nya egenskaper eller träffar på nya objekt som också har samma egenskaper (som i fallet med tal).

Vi kan också snäva in betydelsen. Ord som förekommer i vardagligt språkbruk har ofta en mer begränsad och preciserad teknisk betydelse i matematiken. Exempelvis, *han åt bara en bråkdel av tårtan* är inte en matematisk användning av *bråk*. I det vardagliga uttrycket menas en andel mellan 0 och 1, medan *bråk* i matematiken refererar till förhållandet mellan två heltal, där nämnaren inte är noll. Ordet *tal* används ibland för uppgift i läroboken, medan det matematiskt har en annan innebörd.

Från studier om hur barn lär sig sitt modermål vet vi att de är fullt kompetenta att snäva in betydelsen när det är nödvändigt. Typiskt är att nya ord används i alltför vid mening i början för att senare snävas in och närma sig det allmänna bruket. Samtidigt utvidgas ord i andra sammanhang (i t ex slanguttryck) långt utanför den ursprungliga betydelsen (*hänga ihop* med någon, *nita* någon). Vaghet och mångtydighet verkar vara kärnan i ett effektivt språkbruk, och barn verkar på det hela taget klara av det mycket bra.

Elevaktiviteter

Uppgift 1

$12 = ? + ?$
Hur stor är valfriheten för det första talet? För det andra?

Förmågor:

Specialisering (pröva med olika tal) och *Generalisering* (försöka uppfatta och förstå likheter i lösningarna för att kunna att hitta ett sätt att konstruera alla möjliga talpar).

Förutsäga och *Övertyga* uppstår när man försöker försäkra sig själv, och sedan andra, om att man verkligen kan hitta alla möjliga talpar.

Teman:

Att *Göra* (7 + 5 =) och att *Återställa* (hitta talpar med en given summa).

Att undersöka *Öppenhet* (hur stort är friutrymmet för det första talet? För det andra?) och *Begränsning* (vilken betydelse har ett ytterligare villkor?).

Varianter:

Börja istället med $12 = ? + ? + ?$

Ett bestämt antal operationer, fler än två. Tillåt olika operationer. Kräv att varje deloperation ska ge heltal som svar (som vid $12 = ((? + ?) \cdot ? + ?) / ?$).

Uppgift 2

Tänk dig en tallinje som fortsätter åt höger och vänster. Tänk dig att du står någonstans på tallinjen, vänd åt det håll talen växer och blir större. Tänk dig att du i tur och ordning går framåt tre steg, dubblar ditt nuvarande avstånd till origo, backar tre steg, vänder dig helt om (180 grader), går framåt tre steg och slutligen halverar avståndet till origo.
Var är du nu? Åt vilket håll är du vänd? Utför din förflyttning och beskriv den muntligt eller skriftligt med ord. Hitta på en lämplig notation för att visa hur du rört dig.

Förmågor:

Föreställningar och *Uttryck*.

Teman:

Öppenhet och *Begränsning*: Det finns många tänkbara instruktioner, men en given sekvens begränsar och reser frågor. Att *Göra* (att följa instruktioner) övergår i att *Återställa* (vilka instruktioner leder till en given slutposition och riktning), vilket leder till *Klassificering* av instruktioner med samma resultat, som i slutänden är kopplat till algebraiska manipulationer.
Invarians och *variation*: Vad förändras och vad förblir det samma?

Varianter:

Varje elev kan ha sin egen tallinje. Några eller alla elever kan utföra/dramatisera förflyttningarna. De kan överlägga med bänkgrannen innan de berättar för hela klassen.
Implicita dimensioner av möjlig variation kan omfatta sådant som att förändra steglängden, att använda andra skalfaktorer och andra punkter än origo som centrum för sträckning/skalning, att förlänga och komplicera stegningssekvensen, att vrida sig 90 grader och ge sig ut i talplanet, utanför tallinjen.

Uppgift 3

Bestäm största gemensamma delaren (SGD) till 28 och 30. Leta upp ett annat talpar med samma SGD. Och därefter ytterligare ett par. Beskriv hur man kan hitta alla sådana talpar.

Förmågor:

Specialisering (att testa egenkonstruerade talpar och att leta efter fler med samma egenskap) och *Generalisering* (att försöka identifiera vad som är gemensamt i konstruktionen av alla talpar med önskade egenskaper).
Förutsäga och *Övertyga* uppkommer i samband med att man säkerställer för sig själv, och senare övertygar andra, att det går att konstruera alla efterfrågade talpar.

Teman:

Att *Göra* (bestämma SGD) och att *Återställa* (hitta tal med given SGD).

Varianter:

Byt ut SGD mot minsta gemensamma multipel, MGM. Bestäm SGD till tre tal och omvänt samtliga tre tal med en bestämd SGD.

Observation:

Det kan bli nödvändigt att förändra metod att bestämma SGD, när man övergår från att hantera specifika tal till att betrakta alla möjliga tal.

Uppgift 4

Skriv ner fyra på varandra följande hela tal. Beräkna produkten av dem och addera 1.
Vilken sorts tal kan du få på det här viset?

Förmågor:

Specialisering (att testa med egna tal) och *Generalisering* (att leta efter mönster i resultaten).
Förutsäga och *Övertyga* uppkommer

när man försöker förutse vilken sorts tal som kan genereras och sedan börjar leta efter orsakerna till varför dessa är de enda möliga talen, genom att organisera sina exempel, klassificera och karaktärisera resultaten så att det kan bli möjligt att urskilja några mönster.

Teman:

Man letar efter egenskaper i resultaten som är *invarianta* medan de fyra konsekutiva heltal som används *varierar. Öppenheten* att fritt välja fyra tal är omedelbart *Begränsad* i och med villkoret att de ska vara konsekutiva.

Varianter:

Försök hitta andra beräkningar som ger *intressanta* resultat (det är inte så lätt som det kanske verkar!). Prova att använda negativa heltal. Ändra villkoret *konsekutiva tal* till *tal med konstant differens* och undersök hur *addera 1* måste ändras.

Observation:

Det är lätt att hamna i snårig algebra om man inte är försiktig och först börjar med noggrant utvalda aritmetiska exempel och noga jämför starttalen med resultatet. Hur ska man kunna övertyga andra om att klassificeringen och karakteriseringen av de möjliga svaren är korrekt?

Uppgift 5

Tänk på ett tal.
Tänk på ett tal mellan 2 och 3.
Tänk på ett tal mellan 2 och 3 som har 7 i decimalutvecklingen.
Tänk på ett tal mellan 2 och 3 som har 7, men inte 5, i decimalutvecklingen.
Tänk på ett tal mellan 2 och 3 som har 7, men inte 5, i decimalutvecklingen och som är så nära 2,5 som möjligt.

Förmågor:

Förutsäga (att testa om ett tänkt tal passar in och skaffa sig en känsla för vilken sorts tal som kan uppfylla villkoren) och *Övertyga* andra om att talet verkligen uppfyller alla villkor.
Specialisering genom att testa talet mot varje villkor och *Generalisering* till alla tänkbara sådana tal.

Teman:

Från början råder total *Öppenhet* men allteftersom fler och fler *Begränsningar* läggs till blir det svårare att hitta tal som fungerar.

Varianter:

Använd andra villkor. Låt eleverna hitta på egna villkor.

Observationer:

Det finns mycket att diskutera när det gäller ”hur nära” man kan komma.

Antaganden och principer

Jag antar, bland annat, att

Lärande innebär att lager läggs på lager (a layering process) på liknande sätt som undervisning. Lärande kan inte beskrivas som att gå uppför en trappa, som en regelrätt progression, utan snarare som en allt tätare vävd och allt rikare dekorerad bildvävnad av kompetens och självförtroende, av medvetenhet och känslighet.

Lärande innebär att lägga märke till nya kännetecken och att urskilja, tidigare ej uppfattade aspekter, genom att bli exponerad för variation (Marton & Booth 1997, Runesson 1999, 2001).

Repetition och upprepning är inte tillräckligt (Watson, under tryckning).

Effektiv undervisning äger rum när tillfällen uppmärksammas och tas tillvara för att stimulera elever till att använde sina förmågor till att komma underfund med viktiga idéer och att skapa specialfall för sig själva för att kunna se vad som är generellt.

Att använda sina förmågor är skönt och det bidrar till intresse och engagemang. Att någon annan visar upp sina förmågor utan att "släppa in mig" leder till frustration, brist på intresse och mindre medverkan.

Det som gör en uppgift, eller snarare en samling av relaterade uppgifter, pedagogiskt användbara eller ej beror inte på repetitionen utan i vilken utsträckning elever uppmuntras att använda sin förmågor och bli medvetna om den användningen.

Principerna bakom dessa punkter består av ett antal antaganden. Dessa antaganden låter sig, på grund av sin natur, inte bevisas på något rigoröst sätt eftersom det inte är klart hur ett motexempel skulle se ut. Någon som inte uppvisar de beskrivna förmågorna kan ändå ha dem fastän kontakten med dem har försvagats, t ex för att man stötts bort från matematik redan i unga år. Tillförlitligheten hos mina antaganden kan trots allt undersökas genom personliga experiment med sig själv eller med kollegor och med barn.

Varje barn som börjar skolan har flera förmågor för att göra världen i stort begriplig, och mer specifikt också matematiken.

Varje boksida, varje uppgift innebär möjligheter för den lärande att använda sina förmågor till att specialisera och generalisera, till att föreställa sig och uttrycka sig, till att förutsäga och verifiera i en form eller en annan.

Att aktivera de lärande genom att få dem att använda sina förmågor, t ex till att konstruera egna exempel, till att sortera objekt och att söka och uttrycka generalitet, är väsentligt för ett effektivt lärande.

Kärnpunkten är inte om barn har sina förmågor undanträngda, utan istället hur man kan locka fram, använda och utveckla dem. Genom att uppmärksamma elever på deras förmågor när de använder dem spontant, och kanske genom att benämna dem (Mason, 1999), är det möjligt att uppmuntra en förnyad användning mer indirekt vilket kan minska den lärandes beroende av hjälp från läraren. Det bästa testet på hur elevernas förmågor används är att undersöka om det är någon skillnad på arten av frågor, som läraren finner nödvändiga att ställa, i slutet av skolåret jämfört med i början. Om alla avsnitt behandlas på samma sätt och om läraren hela tiden ställer samma typ av frågor är antagligen eleverna beroende av att läraren styr och har inte lärt sig och kommit underfund med sina egna resurser och hur de fungerar.

REFERENSER

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (1999). The role of labels for experience in promoting learning from experience among teachers and students. In L. Burton (red.), *Learning mathematics: from hierarchies to networks*. London: Falmer.

Mason, J. (2002). Learning mathematics mathematically: knowledge for a new century. *Proceedings of EARCOME 2 SEACOM 9*. Singapore.

Runesson, U. (1999). *The pedagogy of variation: different ways of handling a mathematical topic*. Acta Univertsitatis Gothoburgensis. Göteborg: Göteborgs universitet.

Runesson, U. (2001). What matters in the mathematics classroom? Exploring critical differences in the space of learning. In C. Bergsten (red.), *Proceedings of NORMA01*. Högskolan Kristianstad.

Watson, A. (under tryckning). Unison responses in mathematics classrooms. *For the learning of mathematics*.