

Sådana betingelser inbjuder till en mekanisk bearbetning av stoffet. Ett villkor för att algoritmisering skall uppträda är att känsligheten för variationer i problemen avtar. Vardagliga beräkningar utmärks av att problemen växlar och känsligheten hålls därigenom vid liv. Undervisning och läromedel kan däremot bjuda på en ovanlig homogenitet där uppgifter av ungefär samma karaktär radat upp sig inom begränsade avsnitt. Det förefaller mycket osannolikt att känsligheten förblir opåverkad av denna bedövande systematik.

Detta är säkerligen förklaringen till att vi här råkat konstatera en funktionell försämring av räknefärdigheter som en effekt av utbildning.

Referenser

Alexandersson Claes (1985), *Stabilitet och förändring*. Göteborg. ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS.

Lindqvist Sven, *Förslag till kombinerad övning i matematik, samhällskunskap och svenska*. Nämnaren nr 3, 82/83.

Hur räknar du — människa?

KURT-ALLAN PAULSSON

1647-988	
Räkna här:	Skriv hur Du tänker här:
$\begin{array}{r} 1647 \\ - 988 \\ \hline 659 \end{array}$	8 is bigger than 7, so borrow 1. $8+8=16+1=17$ so write 9. <u>then</u> Carry 1 to next line. 9 is bigger 4, so borrow one. $9+1=10$, $+4=14$ so write 5. Carry 1 to next line. 10 from 16 = 6. . . I hope that's clearer! (U. Cunningham, North Ireland)

Från en undersökning av aritmetikalgorithmerna i bruk världen över, sammanställd av Kurt-Allan Pettersson, Huddinge.

Då och då har jag stått med en elementär matematikbok från ett annat land i min hand. Ofta har jag då märkt, att de olika algoritmerna vid uppbyggandet av de elementära färdigheterna

inom aritmetiken skiljer sig från dem vi använder i vårt land.

Eller så har jag — ute på praktikbesök — stått böjd över en liten invandrarelev som — tack och

lov — fått fortsätta att räkna på *sitt sätt* grundlagt i hemlandet. Det är vid sådana här tillfällen som tankar uppstått:

Varför använder sig länderna av olika vägar?

Varför har det inte under den tid som matematiken som vetenskap vuxit sig outhärlig i vårt samhälle utsorterats en — och enbart en — väg att administrera en matematisk beräkning?

Varför håller var och en på sin väg? Finns det fler likvärdiga vägar?

Spelar kulturarvet någon roll, så att sådant som tidigare generationer använt sig av är svårt att frigöra sig ifrån?

Syftet med undersökningen byggde på dessa tankar. Det gällde främst att inventera och registrera olika aritmetikalgorithmerna och de tankemönster som ligger bakom handskandet med dem. Sedan att jämföra de olika algoritmerna. Är de algoritmer vi använder i Sverige de mest ändamålsenliga? Vad kan vi lära av de metoder invandrarna för med sig?

Ett övergripande syfte var att utöka kunskapen om olika länders räknetraditioner och på så sätt bidra till att invandrarbarnen ute i klasserna får en bättre matematikundervisning samt att genom denna information vidga lärarnas egen kunskap om vad matematik egentligen är. Slutligen ställde jag mig frågan:

Kan matematik förena?

Först gällde det alltså att inventera och registrera. Hur få kontakt med representanter för olika länder? Jag beslöt mig för att först vända mig till befintliga ambassader och konsulat här i Sverige. Ett introduktionsbrev ställdes samman. Brevet adresserades till kulturattachén på respektive ambasad. I brevet ombads mottagaren utföra fyra beräkningar på *sitt sätt*. Uppgifterna var:

$$128 + 897 + 1\ 646 =$$

$$1\ 647 - 988 =$$

$$45 \cdot 683 =$$

$$8\ 574/6 =$$

Till varje uppgift var tillfogad — *Beskriv kortfattat hur du tänker!*

Undersökningsmaterialet utökades senare genom direktkontakt med utbildningsministerierna i vissa länder, genom intervjuer med blivande hemspråklärare under utbildning vid Högskolan för lärarutbildning i Stockholm, direktkontakt med elever i kommuner med invandratäta upptagningsområden samt genom en vädjan i invandrar-tidningen *På lätt svenska*. Även utländska läromedel granskades. Inalles är 76 länder representerade i undersökningen. I fortsättningen redogörs för några av de intressantaste resultaten. För en utförligare redovisning hänvisas till den fullständiga rapporten.

Addition

Additionsalgoritmen synes vara den algoritm som är mest likartad världen över. De ingående termerna skrivs i position under varandra, symbolen för räknesättet (alltid +) sätts ut och ett streck skiljer termerna från summan. Om stommen i stort är sig lik kan däremot placeringen av symbolen och hjälpsiffror variera. Minnessiffrorna placeras oftast i position överst i algoritmen. Vår svenska *hylla* är unik, inget annat land verkar använda sig av den. I många länder verkar det att vara *fult* att skriva minnessiffror. En liten turkisk elev, som jag iakttog, skrev minnessiffrorna på plats som ovan men suddade omedelbart ut dem vartefter de togs med i beräkningen.

En intressant variant — att placera minnessiffrorna under nedersta termen — redovisas av representanter från England, Kina, Västtyskland, Vietnam och Hongkong.

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 8 \\ 8\ 9\ 7 \\ 1\ 6\ 4\ 6 \\ + \quad 1\ 2 \\ \hline \end{array}$$

I exemplet ovan kommer ju tiotals-tvåan och entals-ettan att stå mycket närmare varandra än om tiotals-siffran placerades *på topp*. Något att ta efter?

Hos en invandrar som gått i skola i Filippinerna under 1960-talet, spårar man detta intressanta hjälpmedel:

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ 1\ 2\ 8 \\ + \quad 8\ 9\ 7 \\ \hline 1\ 6\ 4\ 6 \\ \hline 2\ 6\ 7\ 1 \end{array}$$

Som synes kan streckmarkeringen och 5:an läsas som *femton*. Kanske något att införa bland svenska elever som har det svårt med additionskombinationerna.

Att som vi räkna uppifrån och ner är inte alltid det naturliga. Representanter från Australien, Chile, Jugoslavien, Kuba, Ungern och Österrike deklarerar att de lärt sig att börja nerifrån när de adderar (se sambandet med additiv subtraktion längre fram i artikeln).

En något förvånande väg är den, där de tillfrågade redovisar en addition utförd i två steg (först $128 + 897$ sedan $1\ 025 + 1\ 646$). Av de nio länder som redovisar denna väg är fem varandra närbelägna — Kina, Thailand, Vietnam (kinesisk skola), Hongkong och Malajiska Federationen — varför man har anledning förmoda att metoden lärs ut i skolorna. En annan orsak kan vara att metoden bedöms som pålitligare för svaga räknare.

Jag gör så för att det är lättare och säkrare (finsk hemspråkslärarstuderande).

Subtraktion

Även när det gäller själva *utseendet* av subtraktionsalgoritmen kan man spåra en viss likriktning runt om i världen. När det däremot gäller *tänkesättet* är minst tre metoder i bruk. De vanligaste är: *lånemetoden* (eller växlingsmetoden om man så vill), *likatilläggsmetoden* och den *additiva metoden*.

Lånemetoden tarvar väl ingen närmare presentation. Kanske bör jag dock nämna något om de två övriga.

Likatilläggsmetoden bygger på att: Om man till plus- och minustermen i en subtraktion adderar lika mycket, så är differensen oförändrad.

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 4\ 7 \\ -\ 9\ 8\ 8 \\ \hline 6\ 5\ 9 \end{array}$$

I exemplet ovan kan man inte subtrahera 8 från 7. Plustermen ökas då med 10 ental och minustermen med 1 tiotal. För att komma ihåg att man ökat minustermen kan någon markering behöva göras (här har punkter satts ut).

Den additiva metoden påminner om hur man kan gå tillväga för att kontrollera en subtraktion. Man räknar nerifrån och upp.

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 4\ 7 \\ -\ 9\ 8\ 8 \\ \hline 6\ 5\ 9 \end{array}$$

I detta fall blir resonemanget: Vad ska jag addera till 8 för att summan skall sluta på en 7:a?

$9 + 8 = 17$. 9:an skrivs på entalsplatsen i differensen. 1:an sätts (ev) som minnessiffra intill tiotalssiffran i minustermen o s v.

Av de 76 länder som är representerade i undersökningen, visar det sig att lånemetoden är i bruk i 46 av dessa (60 %). Likatilläggsmetoden förekommer i 18 länder (24 %). Additiva metoden brukas i 9 länder (12 %).

Det är framför allt sådana personer som har sin skolgång *på håll* som använder de två senare metoderna. Detta kan tyda på att lånemetoden är på frammarsch i allt fler länder. Det i sin tur kan bero på att metoden är lätt att åskådliggöra laborativt och lätt går att koppla samman med vardagligt växlande i det decimala penningssystemet. Varianterna på att åskådliggöra växlandet är legio i materialet. Inte mindre än 15 olika skrivsätt har observerats. Här är några:

$$\begin{array}{r} \text{Spanien} \quad \begin{array}{r} -/-\ -/- \\ 1\ 6\ 4\ 7 \\ : \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Norge, Kenia} \quad \begin{array}{r} 10\ 10 \\ 0\ 5\ 3\ 10 \\ \times\ 8\ 7 \\ : \end{array} \end{array}$$

I algoritmerna för likatilläggsmetoden och den additiva metoden är varianterna däremot få. De överensstämmer i stort med skrivsättet i figuren ovan.

I granskade läromedel från Kuba förekommer additiva metoden som *enda* metod. En intressant hypotes kan ställas med anledning av detta: *Är det en medveten metodisk tanke betingad av det faktum att man där också lär ut att i additionsalgoritmen räkna nerifrån och upp?*

Kombination av likatilläggs- och additivt tänkande förekommer också (Västtyskland, Danmark) liksom en metod där man besparas tiotalsovergångar vid subtraktion. Den vägen har tagits upp på sistone av många lågstadielärare i Sverige. Den har för övrigt beskrivits både av Gudrun Malmer (1984) och Jan Unenge (1985). I exemplets entalsrad blir resonemanget här: $10 - 8 + 7 = 9$. Kanske kan man döpa metoden till *tiokamratsmetoden*. I undersökningsmaterialet har metoden endast påträffats i två fall; i Hongkong och som fungerande algoritm hos en engelsman (skola där på 1930-talet).

En privat reflexion får avsluta avsnittet om subtraktion. Vilken lärare i svensk skola djärves grundlägga subtraktionsalgoritmen enligt additiva metoden (man slipper ju att lära in subtraktionskombinationerna)? Detta sett mot den bakgrund att så subtraherar man ofta rent praktiskt

nuförtiden (t ex kassörskan i snabbköpet). Talar inte också de numera smått klassiska exemplen ur HÖJMA-undersökningen, s 26—19 och 401—397, för ett sådant metodbyte?

Multiplikation

Den dominerande algoritmen — jag kallar den *den traditionella* är den som vi använder i Sverige. I 62 av de undersökta länderna förekommer den (82 %). Två andra huvudvarianter har påträffats. Jag benämner dem nedan *den ungerska algoritmen* (6 länder) och *teknad algoritm* (14 länder).

Den traditionella förbigår jag här. *Urtypen* för den ungerska algoritmen beskrivs t ex i Mellanstadiets matematik (Hultman m fl, 1965):

$$\begin{array}{r} 683 \\ \cdot 45 \\ \hline 2732 \\ + 3415 \\ \hline 30735 \end{array}$$

Där framhålls dess fördelar visavi den traditionella. Den tecknade algoritmen kan se ut så här:

$$\begin{array}{r} 683 \cdot 45 \\ \hline 3415 \\ + 2732 \\ \hline 30735 \end{array}$$

eller *ungerskt*

$$\begin{array}{r} 683 \cdot 45 \\ \hline 2732 \\ + 3415 \\ \hline 30735 \end{array}$$

För att markera räknesättet är kryssat (×) förhärskande. Endast i 7 länder (Chile, Finland, Island, Jugoslavien, Sovjet, Västtyskland och Österrike) brukas punkten (·).

Det kan förvåna att den traditionella algoritmen har så stor spridning över vårt klot. Enligt Hultman m fl (1965) är fördelarna få. Vid det

metodiskt-laborativa uppbyggandet av algoritmen har den emellertid ett visst övertag. Det kan ha varit avgörande vid val av algoritmer (jfr lånemetoden).

En egendomlighet, som jag först trodde var en tillfällighet, var när följande algoritm dök upp i materialet:

$$\begin{array}{r} 683 \\ 45 \times \\ \hline 3415 \\ + 2732 \\ \hline 30735 \end{array}$$

Algoritmen kom från Marocko. Att det inte var någon tillfällighet fick jag senare bekräftat genom att algoritmen också används av personer som gått i skola i Turkiet, Libanon, Palestina och Syrien.

Urtypen för den ungerska algoritmen (Hultman m fl 1965) visade sig inte vara i bruk i något av länderna — ej heller i Ungern! Däremot förekom den i denna variant:

$$\begin{array}{r} 683 \\ \times 45 \\ \hline 27320 \\ + 3415 \\ \hline 30735 \end{array}$$

Som synes börjar operationen *ungerskt* med multiplikation med tiotalet. Representerar från 6 länder redovisar denna algoritm (England, Kina, Sydafrika, Tanzania, Hongkong och Guyana).

Den tecknade algoritmen förekommer i 13 (!) varianter, trots att den bara redovisats från 14 länder. Variationerna bestäms av från vilket håll man multiplicerar, var delpunkterna placeras och om man räknar traditionellt eller *ungerskt*. Kanske algoritmen är så ny, att den ännu inte funnit sin slutgiltiga form? Våra grannar Danmark och Norge använder denna algoritm dock efter lite olika principer. Från Jugoslavien redovisas en intressant variant om ena faktorn börjar på en etta:

$$\begin{array}{r} 683 \cdot 15 \\ + 3415 \\ \hline 10245 \end{array}$$

Division

De divisionsalgoritmer som påträffats i materialet är: *den italienska algoritmen, den engelska algoritmen, Celsius algoritmen, den anglo-amerikanska algoritmen* och "*stolen*"(!). Utrymmet medger inte att jag här beskriver dem, utan jag hänvisar till Matematik i grundskolan (s 178—179, Liber 1983).

Den vanligaste algoritmen är den italienska. Den redovisas av 33 stater (43 %). Därefter kommer den anglo-amerikanska, 27 stater. Celsius algoritmen brukas i 16, den engelska i 4 och *stolen* i 3 stater.

Särskilt i de spansktalande länderna tycks den italienska algoritmen dominera. Vanligast är här att man lär in en förkortad algoritmen, där endast delresterna skrivs ut:

$$\begin{array}{r} 8574 \overline{) 6} \\ 25 \overline{) 1429} \\ 17 \\ 54 \end{array}$$

Den engelska algoritmen (använd där redan på 1500-talet) finns bevarad i Bangladesh och Indien:

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 8574} \backslash 1429 \\ \vdots \end{array}$$

(Av utrymmesskäl är här och i fortsättningen endast övre delen av algoritmen utskriven).

I Holland dominerar den helt sedan länge och har detta utseende:

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 8574} (1429 \\ \vdots \end{array}$$

Den anglo-amerikanska algoritmen är sig ganska lik länderna emellan. Endast själva *trappan* har olika utformningar. Ett intressant nytänkande redovisar ett danskt läromedel:

$$\begin{array}{r} 2. \\ \overline{) 48} \end{array} \quad \text{Teckning}$$

$$\begin{array}{r} 2.24 \\ \overline{) 48} \\ -40 \\ \hline 8 \\ -8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{Uppställning}$$

Observera hur sambandet multiplikation—division tydliggörs i algoritmen.

Även Celsiusalgoritmen behandlas relativt enhetligt av de stater som lär ut den. I något fall (Iran) är kolonet (:) ersatt med miniräknarens divisionssymbol (÷).

I undersökningsmaterialet har jag även fått bekräftat att Sverige ingalunda är ensamt om att bruka *stolen*. I tre andra länder — Danmark, Israel och Polen — används den. I det senare landet tycks den ha varit den *enda* algoritmen sedan lång tid tillbaka. Såväl ambassadtjänstemän, hemspråkslärarstuderande som invandrar-elever på mellanstadiet redovisar algoritmen som *sin*. I Polen ser den ut så här

$$\begin{array}{r} 1429 \\ \overline{) 8574} : 6 \\ \vdots \end{array}$$

medan Israel bjuder på denna prydliga variant.

$$\begin{array}{r} 1429 \\ \overline{) 8574} \mid 6 \\ \vdots \end{array}$$

Till slut är det min förhoppning att rapporten — härövan kortfattat redovisad — ska ge medlemmarna i invandrarlandet Sverige insikt om att även inom aritmetiken finns bevarat delar av ett kulturarv, som inte får falla i glömska. Det är också min förhoppning att de lärare som arbetar med invandrare ska kunna använda delar av rapporten för att skapa ett bättre utgångsläge för sina elever.

RAPPORT

Paulsson, Kurt-Allan: Hur räknar du — människa?

En rapport om aritmetikalgoritmer i bruk världen över, Högskolan för lärarutbildning, klasslärarlinjerna, 1985.