Jöran Petersson

Från brakljud till bråkbegrepp

Bråkbegreppet är mångfacetterat och ett område inom skolans matematik som elever ofta hamnar i svårigheter kring. Här ges en översikt på hur bråk kan delas upp i mindre delbegrepp som vart och ett kan vara lättare att ta sig an i undervisningen, var för sig eller samtidigt.

Du promenerar i skogen. Tvärs över stigen ligger en nedfallen gren. Du stiger upp på grenen och gör ett svikthopp. *Braak!* Grenen gick i två bitar när du tog sats. Av ljudet braak fick vi det ljudhärmande ordet brak, enligt språkhistorien. Detta ord fick senare betydelserna *bryta* och *bråk(tal)*. Betänk också att konsonanterna b och f är släkt genom att vara läppljud och att ordet brak i en del språk skrivs frak(tion). Det är poetiskt vackert att de matematiska orden för brutna tal, dvs bråk, har en ljudhärmande bakgrund och liknar varandra i många språk!

Ett mångfacetterat begrepp

Bråkbegrepp förekommer i olika form genom hela vår skolgång. I förskolan kan vi lära oss att dela lika. I grundskolans början lär vi oss division och bråkens plats på tallinjen. Senare i grundskolan, gymnasiet och i högre utbildning använder vi bråk för att lösa problem med skala, blandning, förhållande, andel, proportion etc. Detta gör bråk till ett av skolans mest mångfacetterade och komplexa begrepp. Att resonera kring proportioner och bråk kan också ses som en förutsättning för framgång i algebralärande.

Thomas Kieren systematiserade 1976 bråkbegreppets komplexitet i en sammanhängande modell, en modell som sedan utvecklades vidare av andra matematikdidaktiker. En kritik mot denna modell är att den utgör ett top–down-perspektiv på bråkbegreppet. Det är inte säkert att det beskriver hur barn utvecklar sina bråkbegrepp. Sådana frågor undersöks mycket bättre i studier om enstaka aspekter av bråkbegreppet, en i taget. Vad det gäller generalisering måste man i alla studier också ta hänsyn till aktivitet, kontext och kultur. Följande begreppsmodell för bråk riktar sig alltså till lärare.

delar av helhet & operationen dela upp			
förhållande operationen likhet	division	rationella tal operationen addition	operator operationen multiplikation

problemlösning

Uppdelning av begreppet bråk enligt Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) samt Lamon (2007).

Figuren ovan kan läsas som att aspekten del–hel relaterar till de fyra andra aspekterna och att alla fem aspekter relaterar till problemlösning. Till varje aspekt hör även en operation, utom för division som ju redan är en operation.

Bråk som antal delar av en helhet

Bråk som antal delar av helhet definieras som en *kontinuerlig kvantitet* eller *diskret mängd objekt* som kan delas in i lika stora delar. Exempel på detta är att servera potatismoset (kontinuerlig kvantitet) på fyra tallrikar så att alla får lika mycket mos och att servera 20 köttbullar (diskret mängd) på dessa fyra tallrikar så att alla också får lika många köttbullar. Bråket betecknar alltså en relation mellan antalet delar och storleken på dem. Bråk som antal delar av helhet kräver att täljaren är mindre än nämnaren och sådana bråk kallas *egentliga bråk*. För elever kan kunskapsmålen vara att:

- veta att varje del måste vara lika stor
- kunna utföra delningen så att delarna blir lika stora
- veta att delarna tillsammans blir det hela
- veta att ju fler delar, desto mindre blir de för samma helhet
- veta att förhållandet mellan delar och hela bevaras oavsett form, storlek, orientering eller arrangemang av delarna
- kunna rekonstruera helheten givet en bråkdel.

Ett exempel på den sista punkten är att givet att 3/8 av helheten är 6, så är målet att eleverna kan se 6 som 3 åttondelar av helheten och därmed se att en åttondel är 2 och att det hela blir $2 \cdot 8 = 16$.

Bråk som förhållande

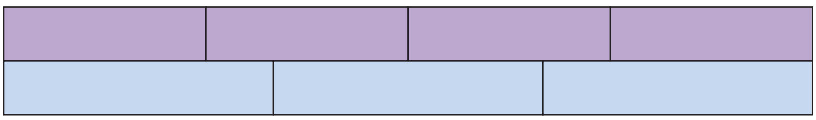
Förhållande delas ofta in i två underbegrepp. Ett exempel: Sju flickor delar på tre pizzor och tre pojkar delar på en pizza. Att jämföra antal flickor med antal pojkar eller antalet pizzor (3 respektive 1) kan vi kalla en *skala*, *index* eller *dimensionslös kvot*. På engelska används vanligen ordet *ratio*. Att jämföra mängden pizza per flicka med pizza per pojke kan vi kalla en *kvot av olika enheter* och på engelska används vanligen ordet *rate*. Vardagliga exempel är hastighet och densitet och särskilt fysiker kan rada upp många sådana exempel.

En viktig egenskap hos skala (ratio) illustreras av följande exempel: Om 1 liter standardmjölk har 3 % fetthalt så har även 2 liter standardmjölk fetthalten 3 %.

Mer abstrakt uttryckt betyder det att om två kvantiteter står i förhållande till varandra och den ena ändras, så ändras den andra, kovarians, så att förhållandet mellan dem är invariant. Denna egenskap kan, men behöver inte, gälla för kvoter mellan olika enheter. Exempelvis har olika mängder vatten samma densitet men om jag har cyklat 5 km på 15 minuter så kan jag cykla ytterligare 5 km såväl långsammare som fortare.

Bråk som division

Bråk kan betraktas som en division av två tal som inte behöver vara av samma enhet. Detta skiljer division från bråk som antal delar av en helhet, där delar och helhet har samma enhet. Tre pizzadelar av totalt fyra pizzadelar inte är samma som att dela en pizza på fyra personer. En viktig följd av detta är att kvoten kan vara större än täljaren som i exemplet 3/(1/4). Sådana divisioner är inte möjliga i bråk betraktade som antal delar av en helhet. Kunskap om bråk som division betyder också kännedom om att nämnaren anger namnet på varje del, t ex tredjedel, och därmed hur många delar som helheten har delats in i och att täljaren anger antalet delar i aktuell andel. Att bemästra bråk som division innebär också att kunna skilja på delningsdivision (engelska: partitioning) och innehållsdivision (engelska: quotitive division). Delningsdivision: *Fyra barn delar på tre pizzor, hur stor del få var och en?* Innehållsdivision: *Några vänner delar lika på tre pizzor och var och en får 3/4 pizza, hur många vänner delade måltiden?* Det senare problemet kan åskådliggöras med hjälp av Cuisenairestavar som i figuren.



Fyra trefjärdeldelar ($4 \cdot 3/4$) blir tillsammans 3 hela ($3 \cdot 1$).

Bråk som rationella tal

Det är i denna aspekt som bråken blir (rationella) tal. De blir alltså inte bara en andel utan egna tal med storlek och därmed *mått* på ett intervall [0; a/b]. Exempel på egenskapen storlek – i forskningslitteraturen används ofta ordet mått – är att för bråk som rationella tal gäller att vi kan jämföra tals storlek och att olikheten $1/3 < 1/2$ alltid gäller, men att för bråk som antal delar av en helhet kan en tredjedels ”vuxenpizza” mycket väl vara större än en halv ”barnpizza”. Ett exempel på elevers svårigheter med att markera det rationella talet 3/4 på en tallinje är att de istället räknar tre skalstreck.

Eftersom bråktal inte finns med i räkneramsan är det ett stort steg att gå från naturliga till rationella tal. Denna skillnad beror på att mellan vilka två rationella tal som helst går det alltid att hitta nya bråktal. Det betyder att trots att bråktalen går att storleksordna – matematiker kallar denna egenskap välordning – så går det alltså inte att räkna upp alla bråktal i storleksordning eftersom det alltid finns nya emellan de uppräknade. Det är alltså först med bråk som rationella tal som det blir begreppsmässigt möjligt att addera och subtrahera bråk. Här räcker inte Cuisenairestavar till, men ett rutat papper kan vara till stor hjälp.

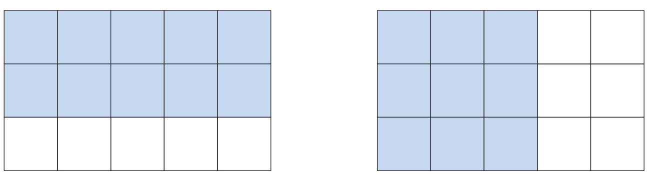
Bråk som operator

Detta avser bråk tillämpat på ett tal, objekt eller mängd. Operatorn kan betraktas som såväl en multiplikationsoperation eller två på varandra följande operationer. Jämför att beräkna tre fjärdedelar av 60 som $0{,}75 \cdot 60$ eller 60 fjärdedelar av 3 som $3 \cdot (60/4)$. Åskådliga tolkningar av detta är att se operationerna som att töja eller krympa längdsegment, alternativt duplicera, dela upp eller reducera antalet diskreta objekt i en mängd. Att töja eller krympa ändrar inte antalet men storleken på varje del medan duplikator-operationen ändrar antalet delar men inte deras storlek. För eleverna kan målen för denna aspekt formuleras med att

- klara av problem som 3/4 av 1/2 som exempelvis $3 \cdot$ (fjärdedelar av halv) eller (3 halvor) delat med 4
- beskriva en kombinerad operation som ”multiplicera med tre och dividiera med fyra” och en sammansatt operation som ”multiplicera med 3/4”
- relatera operatorn 3/4 som att transformera fyra delar till tre.

Bråkbegreppen och eleverna

Mycken forskningsmöda har ägnats åt att rangordna svårighetsgraden i de fem delarna av bråkbegreppet. Det råder enighet om att bråk som antal delar av en helhet är enklast för eleverna, men för övrigt är resultaten spretiga. En god sammanfattning ges av Hallett, Nunes, Bryant och Thorpe som fann att utvecklingen av begrepp respektive procedur kan gå i olika takt och ordning för olika individer. Vad elever lär sig bäst beror ju till stor del på vad läroplanen säger och hur vi undervisar eleverna om ett visst begrepp. Detta blir särskilt tydligt om vi släpper in miniräknare med inbyggd bråkräkning som lätt klarar 2/3 + 3/5, men gäller även om vi endast tillåter papper och penna. Exempelvis har flera forskare rapporterat att eleverna kan lära sig proceduren att göra liknämnigt och sedan addera täljarna utan att klart kunna redogöra vad detta innebär genom att till exempel representera bråkadditionen på annat sätt. Ett ljus i detta mörker är att när eleverna använde area som representation för bråk så gick det bättre än när de representerade bråk med mängder eller på tallinjen. Att representera bråk som area är absolut något vi ska använda oss av när vi läser kursplanens instruktion om centrala metoder för bråkräkning. Figuren nedan visar 2/3 och 3/5 som areor på rutat papper.



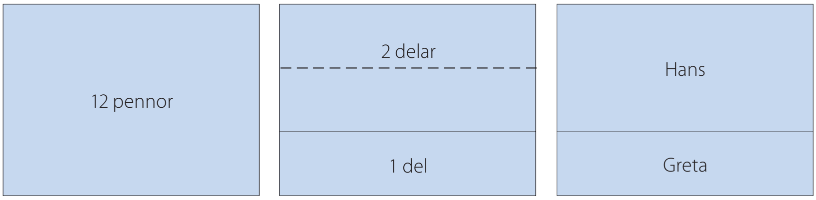
De rationella talen 2/3 och 3/5 som area på rutat papper.

Ett annat forskningsresultat är att det var vanligare att elever som klarade att storleksordna bråk som rationella tal också klarade att addera rationella tal. Omskrivningen av 2/3 som tio femtondelar innebär att bråktalet istället representeras som antal delar av en helhet. Bråktalsrepresentationen i figuren ovan innebär att bråktalen 2/3 och 3/5 representeras som antal delar av samma helhet, här femtondelar, vilket tydliggör vilket av talen 2/3 och 3/5 som är störst.

Ett annat sätt att storleksordna är att behandla rationella tal som en division och beräkna divisionerna 2/3 och 3/5 som decimaltal med eller utan miniräknare. Eftersom arearepresentationen i figuren representerar bråktal som antal delar av en helhet blir det mer åskådligt vad divisionen (2/3)/(3/5) innebär.

Arearepresentationer fungerar även i praktisk problemlösning där bråk ofta förekommer både som förhållande och operator.

Hans har dubbelt så många pennor som Greta. De har 12 pennor tillsammans. Hur många pennor har Hans?



Andelsproblem med geometrisk representation.

Hans och Greta-problemet är formulerat som en ekvation och visar att arearepresentationen även fungerar som illustration för enklare problem i algebra. Det påminner oss om påståendet i artikelns inledning: Goda kunskaper om bråk underlättar algebralärandet.

LITTERATUR

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64 (3), 293–316.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P. & Thorpe, C.M. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102 (2), 395–406.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. I R. Lesh (red) *Number and measurement: Papers from a research workshop* (101–144). Columbus, Ohio: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework. I F. K. Lester (red) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, vol 2 (s. 629–668). Charlotte, NC: NCTM.