Anna Ida Säfström, Cecilia Kilhamn & Rimma Nyman

Rika lösningar på rika problem

– *Felblandad saft*

I tre tidigare artiklar i Nämnaren har vi använt KLAG-modellen för att kategorisera och bedöma lösningar på rika matematiska problem. I den här artikeln återvänder vi till modellen, med ett rikt problem om proportionella samband. Den här gången granskar vi även KLAG-modellens användbarhet och belyser aspekter av lösningarna som modellen inte hjälper oss att få syn på.

Rika matematiska problem berikar matematikundervisningen. För att kunna hjälpa elever att bli bra problemlösare måste lärare vara medvetna om vilka möjligheter ett problem erbjuder. Den erfarenheten fick blivande mellanstadielärare göra under en kurs i problemlösning. De fick arbeta med problemet *Felblandad saft* i smågrupper, och sedan presentera och diskutera sina lösningar för att få syn på problemets möjligheter och begränsningar. Vi har kategoriserat deras lösningsförslag enligt KLAG-modellen, och beskriver här hur de olika uttrycksformerna användes och vilka konsekvenser det fick för möjligheten att förstå det matematiska innehållet.

Ett rikt problem för åk 4–9

Felblandad saft
Anna har blandat en del koncentrerad saft med nio delar vatten. När hon smakar på saften känner hon ingen saftsmak. Hon läser på flaskan att det ska vara en del saft och fyra delar vatten. Hur mycket koncentrerad saft ska hon hälla i för att få rätt blandning?

Problemet syftar till att:

- träna på proportionella resonemang
- jämföra och diskutera olika problemlösningsstrategier.

I de kommande lösningsförslagen framgår att uppgiften har potential att belysa många olika matematiska områden. Problemet kan användas i olika årskurser i grundskolan och ge upphov till fördjupade diskussioner kring olika matematiska innehåll. Svårighetsgraden kan enkelt anpassas genom att exempelvis utgå från att saften ska blandas i förhållande 1:3 men råkade bli 1:9 (lättare) eller att det ska vara 1:7 men råkade bli 2:11 (svårare).

Konkret (K)

Ingen grupp försökte lösa uppgiften med konkret material. En anledning till detta kan vara att det inte går att se de konkreta förhållandena i riktiga saftblandningar. En annan anledning kan vara att grupperna ansåg det vara lättare att rita än att representera problemet med konkret material.

Logisk/språklig (L)

Några grupper använde den språkliga uttrycksformen för att tydliggöra delar av sitt resonemang. Följande tre exempel illustrerar detta:

> Vi vet att 4 delar vatten
> har 1 del saft.
> Vi vill veta hur mycket
> saft 9 delar vatten behöver.
> Därför tar vi reda på hur
> mycket 1 del vatten behöver.

> • Vi måste öka Annas saftblandning
> till 20% av det hela.
>
> • Vi tittar på förhållandet mellan
> delen (saft) och det hela (saft + vatten)
>
> • Vi har bestämt att en del är en deciliter.

> För 9 delar vatten behövs $2\frac{1}{4}$ saft.
> Eftersom 1 del saft redan finns
> behöver vi lägga till $1\frac{1}{4}$ saft.

Algebraisk/aritmetisk (A)

Algebraiska eller aritmetiska uttrycksformer användes av de flesta grupperna. Några grupper tecknade *algebraiska* uttryck för olika förhållanden som ges i uppgiften, med den okända mängden saft som obekant, som i de båda följande exemplen.

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{9}$$
$$9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{x}{9}\right) \cdot 9$$
$$\frac{9}{4} = x$$
$$\frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

x = okända mängden koncentrerad saft

$$\frac{x}{x+9} = \frac{1}{5}$$
$$x = \frac{1}{5} \cdot (x+9)$$
$$x = \frac{1x}{5} + \frac{9}{5}$$
$$\frac{9}{5} = x - \frac{1x}{5}$$
$$\frac{9}{\cancel{5}} = \frac{5x}{\cancel{5}} - \frac{1x}{\cancel{5}}$$
$$9 = 4x$$
$$x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

I det vänstra exemplet tecknades en enkel ekvation som beskriver det proportionella förhållandet mellan den okända delen saft och den kända delen vatten. I det högra exemplet beskriver ekvationen istället det proportionella förhållandet mellan del och helhet. Mängden koncentrerad saft anges som det obekanta, x, och mängden färdigblandad saft uttrycks som $x+9$. Det innebär att variabeln dyker upp på flera ställen, vilket ger en mer komplex ekvation.

Ett annat försök till algebraisk lösning syns i följande exempel. Gruppen har tecknat en ekvation med två obekanta, x och y, där x representerar mängden färdigblandad saft i blandning 1:9 och y representerar mängden saft som ska tillsättas.

X = det vi redan blandat

y = saften vi fyller på

$$\underbrace{0{,}1x + y}_{\text{saften vi har + ny saft}} = \underbrace{\frac{x+y}{5}}_{\text{mängden saft i den nya blandningen}}$$

Eftersom endast antal delar angivits såg gruppen mängden färdigblandad saft som en obekant. Resultatet blev en ekvation med två obekanta som inte går att lösa. För att lösa ut x och y behöver man formulera ytterligare ett samband mellan x och y, vilket gruppen inte lyckades göra.

Ett sätt att lösa uppgiften *aritmetiskt* var med hjälp av optimering, genom att gissa och pröva sig fram på ett strukturerat sätt. Vissa använde sig enbart av division, medan andra strukturerade gissningarna i en tabell, och använde både tal i bråkform och procent.

$$\frac{2}{11} \approx 0{,}18$$

$$\frac{2{,}2}{11{,}2} \approx 0{,}19$$

$$\frac{2{,}3}{11{,}3} \approx 0{,}203$$

$$\frac{2{,}25}{11{,}25} = 0{,}2$$

Tillsatt koncentrat	Förhållande	Förhållande i %
	$\frac{1}{10}$	10%
+ 1 dL	$\frac{2}{11}$	≈ 18%
+ 1,1 dl	$\frac{2{,}1}{11{,}1}$	≈ 19%
+ 1,2 dl	$\frac{2{,}2}{11{,}2}$	= 0,196 ≈ 20%
+ 1,25 dl	$\frac{2{,}25}{11{,}25}$	= 20% EXAKT
+ 1,3 dL	$\frac{2{,}3}{11{,}3}$	= 0,2035 ≈ 20%

Den aritmetiska uttrycksformen användes också ofta som stöd för proportionella resonemang. Exemplet nedan fokuserar på förhållandet mellan delarna, det vill säga förhållandet mellan koncentrerad saft och vatten, för att åstadkomma samma förhållande i den blandade saften som i beskrivningens 1:4. Resonemanget utnyttjar strategin ”vägen över 1” genom att ta reda på hur stor del koncentrerad saft som behövs till 1 del vatten och sedan multiplicera detta med 9. Just den här gruppen har valt att räkna fram andelen saft till 1 del vatten som kan användas för multiplikation (9·0,25). Ett alternativ hade varit att utnyttja den givna ettan i blandningen, det vill säga andelen vatten till 1 del saft, som förutsätter en division (9/4), se tabell på nästa sida.

Saft	Vatten
1	4
?	9
0,25	1

$9 \cdot 0{,}25 = 2{,}25$

$2{,}25 - 1 = 1{,}25$

I följande exempel fokuseras istället förhållandet inom respektive storhet och utnyttjar proportionalitetskonstanten 9/4. Resonemanget bygger på att förhållandet mellan mängden vatten i receptet och i blandningen är detsamma som förhållandet mellan mängden saft i receptet och mängden saft i blandningen. Eftersom vattnet ökar från 4 till 9 så ändras det med en faktor 2,25.

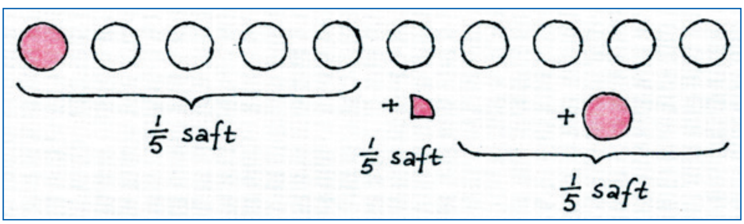
Vatten från 4 till 9 = 2,25

Saft $1 \cdot 2{,}25$

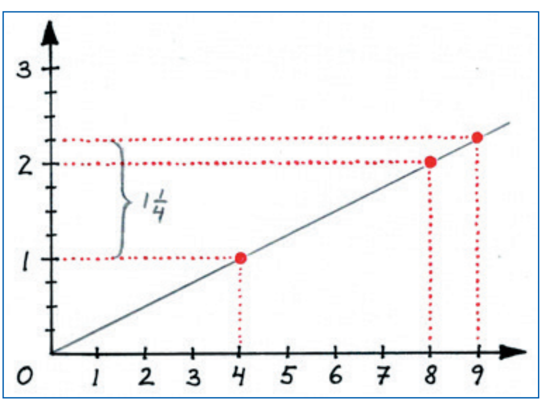
(Förtydligande: $\frac{9}{4} = 2{,}25$)

Grafisk (G)

Den vanligaste grafiska lösningen var att rita upp delarna som cirklar eller rutor, eller rent av som en flaska eller behållare med saft och vatten separerat. Detta gör det möjligt att para ihop vatten och saft i förhållandet 4:1, och det blir lätt att se vilka delar saft som behövs.



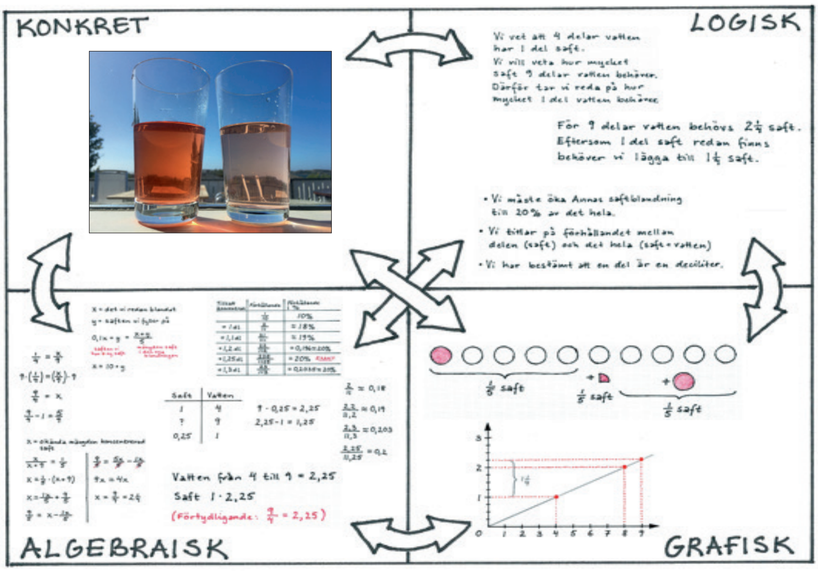
En grupp valde att illustrera sambandet mellan vatten och koncentrerad saft i en funktionsgraf. Med hjälp av två kända punkter, (0, 0) och (4, 1), identifierades ett linjärt samband mellan delar vatten på x-axeln och delar koncentrerad saft på y-axeln.



Grafen kan nu läsas av för $x = 9$, och den mängd koncentrerad saft som behöver tillsättas blir då avståndet mellan y-värdet för $x = 4$, det vill säga 1, och y-värdet för $x = 9$, det vill säga 2 ¼.

Att zappa mellan olika uttrycksformer

I de flesta fall använde grupperna två olika uttrycksformer för att lösa uppgiften. Logisk/språklig uttrycksform användes för att förklara grafiska bilder och algebraiska eller aritmetiska uttryck. Grafiska bilder kunde också användas som underlag för att teckna symboluttryck. I några fall löste gruppen uppgiften med enbart algebraisk eller enbart grafisk uttrycksform. Språklig/logisk uttrycksform förekom dock bara som komplement till lösningar som dessutom använde aritmetik, algebra eller bilder. I ett fall redovisade gruppen två olika lösningar, en optimeringslösning och en grafisk i form av en bild av delarna. De två lösningarna stämdes av mot varandra och fungerade på så sätt som kontroll av att resultatet var korrekt.



Begränsningar hos KLAG-modellen

I våra exempel blir det snabbt tydligt att det finns många intressanta, kvalitativa skillnader mellan olika lösningar också inom en uttrycksform. Även om KLAG-modellen är användbar för att göra en grov kategorisering av lösningarna, ser vi att den inte hjälper oss att synliggöra många viktiga matematiska aspekter som bör lyftas för diskussion i klassen.

Inom kategorin algebraisk/aritmetisk finns det tre kvalitativt olika lösningar med olika matematiska innehåll: algebraiska uttryck, optimering och proportionella resonemang. Bland de algebraiska uttrycken finns det också kvalitativa skillnader: vissa uttryck ger upphov till enkla ekvationer, andra till svårare, och ytterligare andra till ekvationer som inte kan lösas. Att jämföra dessa och koppla dem till originalformuleringen av problemet är centralt för att utveckla kunskaper och förmågor inom algebra.

Samma sak gäller för proportionella resonemang. I de presenterade lösningarna fokuseras olika samband: förhållandet mellan del och helhet (vatten : färdig saft), del–del-förhållandet inom respektive storhet (saft : saft respektive vatten : vatten), och del–del-förhållandet mellan storheterna (koncentrerad saft : vatten). Att gissa på ett strukturerat sätt är en giltig matematisk metod, som formaliseras inom optimering. I undervisningen vill vi inte att elever alltid ska falla tillbaka på en sådan metod, utan även utveckla färdigheter i att resonera matematiskt och att använda algebra. Det betyder att eleverna behöver få möta uppgifter som är så svåra att det inte är en användbar strategi att gissa och pröva. I de uppgifter elever möter i läroböcker är situationerna ofta tillrättalagda och svaren ofta enkla tal. Ett sätt att undvika detta är att skapa uppgifter utifrån vardagssituationer.

Även bland de grafiska lösningarna finns exempel av två helt olika karaktär. Den ena är en konkretiserande bild där problemet i sig avbildas i en mer eller mindre realistisk (ikonisk) bild. Dessa skildrar ett i huvudsak additivt resonemang. Den andra är en traditionell graf av en rät linje i ett koordinatsystem, vilket är ett mer abstrakt sätt att betrakta problemet. Denna lösning skildrar ett multiplikativt resonemang där förhållandet är konstant, och kan med fördel kopplas samman med algebraiska uttryck och proportionella resonemang.

Språkliga uttryck användes bara som stöd för andra lösningar. Det får oss att dra slutsatsen att det inte är så fruktbart att separera ut detta som en egen uttrycksform. Det kan däremot vara värdefullt att belysa hur språk kan användas på olika sätt: som stöd för lösningar genom att förklara bilder, symboler och operationer, eller för att faktiskt föra logiska resonemang med slutsatser och härledningar.

Slutsats

Det finns viktiga innehållsliga skillnader mellan olika lösningar på rika problem som KLAG-modellen inte hjälper oss att få syn på. Modellen kan vara en bra utgångspunkt för att sortera elevers olika lösningar, men diskussionen i klassen måste fördjupas innehållsligt. Inom varje uttrycksform kan lösningarna variera i komplexitet, matematiskt innehåll och abstraktionsnivå. Vi hävdar att det finns stor potential för läraren att koppla samman olika lösningar där skillnaderna och likheterna mellan dem problematiseras, och då behövs en noggrannare analys av lösningarna än den KLAG-modellen ger.

LITTERATUR

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem, inspiration till variation*. Malmö: Elanders Berglings förlag AB.

Hedrén, R., Taflin, E., & Hagland, K. (2005). *Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?* Nämnaren 2005:1.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2016). *Om proportionalitet*. Nämnaren 2016:3.

Lundberg, A. L. V. (2011). *Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasiematematiken – en studie om läromedel och nationella prov.* Licentiatavhandling, Linköping.

Magnusson, J. (2014). *Proportionella samband – Innehållets behandling och elevernas lärande.* Licentiatavhandling, Göteborg.