

Problem med stenplattor

Författarna har under flera år bedrivit ett forskningsprojekt med syfte att ta reda på hur lärare och elever tänker om lektioner kring problemlösning, vilka tillfällen till lärande som uppstår under sådana lektioner och hur lärarna och eleverna utnyttjar dessa tillfällen. Här ges exempel från problemet Stenplattor. Främst behandlas de matematiska idéer som kommer fram och används vid lösandet samt hur elever och lärare drar nytta av dessa.

Varför problemlösning?

Grundskolans och gymnasieskolans kursplaner ger klara belägg för att vi ska syssla med problemlösning i skolans matematikundervisning. Men *varför* ska vi göra det? Ja, givetvis är det bra att våra elever får träna på att lösa problem, i kommande situationer både i arbetslivet och i vardagslivet kommer de säkert att ställas inför många matematiska problem som de behöver lösa. Men är det enda skälet? Vi tror att det i samband med problemlösning mer borde betonas att eleverna faktiskt kan lära sig en hel del matematik just genom att lösa matematiska problem. Då skulle lärare känna att de faktiskt "hinner med" sina ofta av läroböckerna definierade kurser just *därför* att de låter sina elever syssla med problemlösning.

Forskningen kring problemlösning i skolan har enligt vår åsikt framför allt handlat om att undersöka elevers strategier och faktorer som påverkar elevernas förmåga att lösa problemen. Vi har sökt att styra in vår forskning mot själva lärandet av matematik.

Vi vet att det är svårt att få reda på exakt när en elev lär sig att behärska ett matematiskt begrepp eller en matematisk procedur, men vi vill ändå försöka undersöka vilka *möjligheter* till lärande som elever och faktiskt även deras lärare har, när de sysslar med noggrant utvalda matematiska problem.

Därför har vi under tre år bedrivit forskningsprojektet *Rika problem i matematikundervisningen*, RIMA, under skolår 7 – 9. Där vill vi bland annat försöka få reda på hur lärare tänker när de planerar och genomför och funderar över sina lektioner kring problemlösning, vilka tillfällen till lärande som uppstår när eleverna arbetar med problemen och hur eleverna utnyttjar dessa tillfällen. Vi kommer att skriva mer om RIMA-projektet i en kommande artikel. Här vill vi koncentrera oss på ett av de problem som vi gett våra försöksklasser, problemet *Stenplattorna*. Vi vill speciellt berätta litet om vilka matematiska idéer elever och lärare använde sig av när de sysslade med problemet.

Teori för lärande

De tankar och idéer som vi bygger vår forskning på hänför sig i stor utsträckning till den sociala konstruktivismen. Denna teori hävdar bland annat att eleven är aktiv, att hon själv bygger upp sin kunskap, när hon bearbetar de sinnesintryck som hon får från sin omgivning. Vid denna konstruktion spelar hennes tidigare erfarenheter och kunskaper stor roll.

Samtidigt är också hennes studiekamrater viktiga. När elever som har liknande erfarenheter och kunskaper tillsammans diskuterar ett problems lösning, då ges de alla stora möjligheter att bygga på och fördjupa sina tidigare kunskaper. För eleverna ligger det många gånger närmare till hands att värdera och kritisera kamraternas påståenden än lärarens. Kamraterna är inte några auktoriteter på samma sätt som läraren är. Tillsammans med kamraterna har eleven ett gemensamt språk och är nära sitt eget lärande.

En viktig aspekt är också elevens närmaste utvecklingszon, som brukar definieras

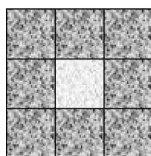
som det kunskapsområde, där en elev inte kan klara en uppgift på egen hand men kan göra det med endast litet stöd och hjälp från en kunnigare person. Chansen att en elev ska vilja och kunna erövra ny kunskap anses vara mycket större om kunskapen finns just i elevens närmaste utvecklingszon.

Detta gör att läraren självklart spelar en stor roll vid elevens byggande av kunskap. Hennes roll är bland annat att

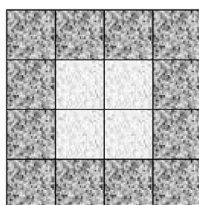
- ordna en miljö för lärande;
- gå in med vägledning och stöd utifrån elevens eller gruppens tankar och idéer;
- söka reda på de idéer och tankegångar hos enskilda elever eller elevgrupper, som kan vara värdefulla att föra fram i en gemensam diskussion;
- leda diskussioner i klassen så att elevernas idéer tas på allvar, uppmuntras och utvecklas;
- förmedla engagemang för matematikämnet och vara en god förebild.

Stenplattor

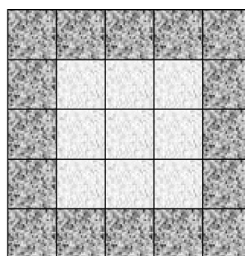
Ett mönster läggs med hjälp av kvadratiske stenplattor, mörka och ljusa. Så här ser mönstret ut:



figur 1



figur 2



figur 3

- Hur många plattor går det åt till figur 5?
Hur många av dem är ljusa och hur många är mörka?
- Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 15?
- Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 100?
- Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur n ?
- Skapa ett liknande problem. Lös det.

Problemet är här något förkortat.

Om problemet

Det problem som vi behandlar i den här artikeln, se föregående sida, är av en ganska vanlig typ, där det gäller för eleverna att med någon induktiv metod ta reda på det mönster som bygger upp de olika figurerna. Detta mönster kan de sedan uttrycka som någon slags regel och slutligen som en formel, där n ingår som variabel.

Några resultat

Vi kan här endast ta upp ett fåtal exempel på matematiska idéer som eleverna utnyttjade i samband med sin problemlösning. Vi illustrerar våra exempel med dialoger antingen mellan *lärare* och *elev* under pågående problemlösning eller mellan *intervjuare* och *elev* vid en intervju efter problemlösningstillfället.

Räkna rutor

Eleverna räknade helt enkelt antalet rutor som fanns på de ursprungliga bilderna eller på figurer som de själva ritat. De klippte antingen ut rutorna och räknade dem eller räknade dem direkt på figurerna. Ett exempel på en dialog kan illustrera detta:

- Elev Vi behöver ett större papper om vi ska kunna måla figur 100.
Lärare Ska ni måla den?
Elev Ja vi målade ju figur 15.

Rekursion

Andra elever upptäckte att man kunde räkna sig fram till antalet plattor från en figur till nästa på det sätt, som följande uttalande visar "... öka dom vita med tre, och här ökar dom med fem [och där] sju, varje heltal." Dessa elever upptäckte också att de mörka plattornas antal ökade med fyra när man gick från en figur till nästa.

Area

En annan metod som eleverna använde var att betrakta olika ytor i figurerna vars area de kunde beräkna. Några beräknade då först totala antalet plattor och antalet ljusa plattor för att sedan få fram antalet mörka genom att ta differensen mellan dessa två tal. Antalet ljusa plattor och totala antalet plattor beräknades då enligt följande modell. (Intervju skedde efter lektionen.)

- Intervjuare Kan du säga allmänt hur man bär sig åt för att räkna ut antalet ljusa plattor i någon, i någon figur?
Elev Ja, då tar man ju den här sidan gånger sidan.
Intervjuare Precis. Och hur vet man då hur många plattor det ligger i den här sidan?
Elev Det är lika många som numret på figuren.

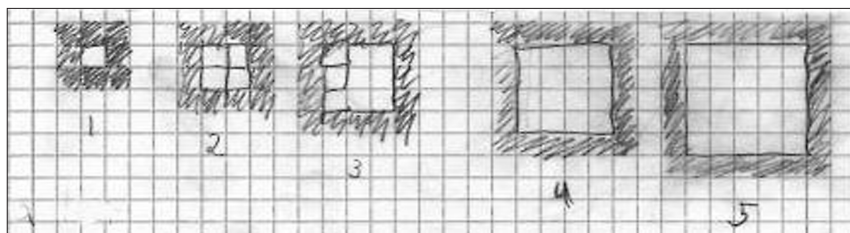
- Intervjuare Hur bär man sej åt för att, hur bär man sej åt för att räkna ut totala antalet plattor då?
Elev Då tar man den sidan, fast då lägger man till två på den här sidan, tar man den [gångar den] sidan.

Ett annat sätt vi såg att eleverna använde var att se de ljusa plattorna som en yta och de mörka som en ram runt den ytan. För att få antalet mörka plattor använde då till exempel en elev följande sätt:

- Elev Mörka får man ta ... om det är figur 100 så tar man och lägger på 2 på överkanten och 102 plus 101 plus 101 plus 100.

Det fanns även andra sätt att ta fram detta antal, till exempel 4 gånger 101 eller 4 gånger 100 plus 4.

Många elever som använde sig av någon av dessa metoder kunde sedan ge en generell regel för hur man kan räkna ut antalet ljusa eller mörka plattor för vilken figur som helst.



d)	Figur	Antal plattor	Ljusa	Mörka	
1 a 11	1	9	1	8	Mörka plattor 8 var med 4
	2	16	4	12	per figur.
	3	25	9	16	Antalet plattor.
	4	36	16	20	Eftersom det
	5	49	25	24	är 9 plattor
	6	64	36	28	i figur 1 så
	7	81		32	ägger man på
	8	100		36	7 för att det ska
	9	121		40	bli lika många som i figur 2. →

Ett exempel på tabell gjord av elever.

Tabell

Lärarna gav eleverna tipset att i en tabell skriva upp totala antalet plattor, antalet mörka plattor och antalet ljusa plattor för ett stort antal, femton stycken eller fler, figurer. Med hjälp av denna tabell var det sedan relativt lätt att hitta ett mönster och komma fram till en generell regel. Två elever förklarade:

Intervjuare På vilket sätt hjälpte den (tabellen) er?

Elev 1 Hur man skulle kunna göra.

Elev 2 Att se hur mönstret såg ut och så.

Elev 1 Hur man skulle kunna fortsätta och bygga på mönstret och så där.

Algebra

Att svara på frågan hur många mörka respektive ljusa plattor det går åt till figur n var inte lätt före eleverna. Här förekom en hel del missuppfattningar, vilket nedanstående uttalanden visar.

Elev Du n vad kan det vara, a , b , c , d , e ; e är då 5, n är då 14?

Lärare Nej (skrattar) n är det matematiska tecknet för vilken som helst.

Elev Jaha!

Elev Äh, äh, ja, men alltså vi börja med att liksom räkna så här, dom ljusa först och kalla den, dom för x , och dom mörka var liksom bara så många som dom var. Sen räknar så på alla dom tre första figurerna och sen så, ja, x -et står för att dom ljusa plattorna, eller hur många dom ljusa plattorna är.

I det sistnämnda fallet angav alltså eleverna antalet plattor på den andra figuren till $4x + 12$, vilket för dem betydde 4 ljusa och 12 mörka plattor.

När läraren sade att n stod för ett godtyckligt tal, trodde många elever att de själva fick välja vilket tal som helst att räkna med. En grupp räknade därför med att n var 446 en annan att det var 0.

Det fanns också exempel på att eleverna var på god väg att få grepp om hur man använder n som variabel i det här problemet.

- Intervjuare Kan du förklara nu?
Elev Nja, det tror jag.
Intervjuare Ja. Gör det får jag höra då.
Elev Att ... n kunde ju vara vilken siffra som helst.
Intervjuare Mm.
Elev Bara att plussa på 2 stycken på figur, till exempel figur 5 så var det 7 stycken.

Inom parentes kan nämnas att den här eleven sade sig ha insett hur n kan användas när han såg en kamrat redovisa på tavlan.

Hur behandlar lärare och elever de matematiska idéerna?

Det är intressant att se att en del elever använde sig av ganska primitiva metoder åtminstone till att börja med. Detta behöver givetvis inte vara något fel. Förhoppningsvis kan dessa elever komma fram till ett mer abstrakt och generellt resonemang så att de hittar ett smidigare sätt att räkna ut antalet ljusa respektive mörka plattor på en figur utan att behöva rita upp eller klippa ut rutor ur just den figuren. Om de inte klarar av att finna en annan metod hamnar de i en återvändsgränd.

En sådan återvändsgränd kan också lösningen med hjälp av rekursion visa sig vara. Visserligen har de elever som använder sig av den kommit ett steg längre, men ändå är det näst intill ogörligt för dem att till exempel räkna sig fram till antalet plattor på den hundrafiguren med hjälp av denna metod. Helt omöjligt blir det att räkna ut antalet plattor för den n :te figuren om man bara använder sig av rekursion.

Om eleverna däremot samlar sina data i en tillräckligt utförlig tabell, blir det mycket lättare för dem att se det mönster som de olika talen bildar, det vill säga att alla tal som anger totala antalet plattor och alla tal som anger antalet ljusa plattor är kvadrattal. Från den upptäckten är steget inte långt till en insikt om hur dessa två antal ska beräknas för en figur med godtyckligt nummer.

Elevernas vägar

Det finns dock en annan väg att gå, som många elever visade oss. Genom att rita några figurer till och betrakta den yta som de olika typerna av plattor upptog kunde de använda olika areaformler för att beräkna antalet. Antingen beräknade de antalet mörka plattor för sig och antalet ljusa plattor för sig eller också beräknade de totala antalet plattor och antalet ljusa plattor och fick antalet mörka plattor som differensen mellan dessa båda tal.

Antingen eleverna kom fram via en tabell eller genom att betrakta olika ytor, visade det sig att de kunde uttrycka regler med egna ord för beräkning av antalet plattor av olika slag för en figur med godtyckligt nummer. Att utnyttja denna kunskap för att ange antalet i form av en formel som innehöll variabeln n visade sig däremot vara betydligt svårare.

Många elever ville ge n ett bestämt värde. Här var de säkert påverkade av det faktum att den algebra som de dittills hade sysslat med i stort sett bestod av ekvationslösning, där x ju står för just ett bestämt tal. Många lärare påpekade dessutom att de kunde tänka på den algebra som de hade sysslat med. Den något okonventionella användningen av x i uttrycket $4x + 12$, där x alltså skulle uttrycka att det var 4 ljusa plattor har förmodligen också uppstått därför att eleverna var vana att se uttryck av detta slag i samband med ekvationslösning.

Samtidigt såg vi hur många elever var på god väg att knäcka den kod, som i det här problemet liksom i så många liknande problem för över från aritmetiken till algebran. Men här behövdes mycket stöd och hjälp från läraren. Om han eller hon exempelvis tar chansen att utnyttja de tillfällen som olika uttryck för antalet mörka plattor i figur n kan skapa, till exempel $4(n + 1)$ respektive $(n + 2)^2 - n^2$, tror vi att hon kan uppmuntra till både kunskap om och motivation för algebraiska manipulationer hos eleverna. Sådana manipulationer kan ju helt lössryckta verka både svåra och meningslösa för dem.

Lärarens roll

Genom vad vi här har sagt har vi återvänt till lärarens roll. Det är ju helt uppenbart att den är oerhört viktig för att eleverna ska få ut mesta möjliga av den spännande problemlösningen. Eleverna som räknar rutor måste få en adekvat uppmuntran att gå vidare i mer abstrakta tankebanor. De som fastnar i rekursion kanske behöver just tipset att göra en tabell för att se sambanden på ett annat sätt. Så här sade en elev efteråt, när hon tillfrågades om vad hon lärt sig vid problemlösningen:

Elev Ja men alltså, det är lätt att ställa upp det i en tabell alltså och sen försöka hitta mönster i stället för att kladda överallt på olika papper så man, då liksom ser man ju vad man hållit på med ungefär.

Inte minst tror vi att den avslutande diskussionen är av stor betydelse för elevernas lärande i samband med problemlösning. Där kan läraren till exempel ta upp olika uttryck för antalet mörka plattor och sambandet mellan dem som vi nämnde ovan. Där passar det också att ta upp missförstånd och

missuppfattningar av den typ som uttrycket $4x + 12$ ovan ger uttryck för. Det var inte bara den aktuella gruppen som hade svårt att använda variabler på det sätt som man i matematiken har kommit överens om.

Vi har i den här artikeln sökt peka på några matematiska idéer som kommit till uttryck vid lösandet av det här rika problemet. Vi är övertygade om att de elever som arbetat med dem med rätt hjälp och uppmuntran kan lära sig mycket genom dessa idéer, mer än vad de kanske själva i förstona anar.

Rolf Hedrén är biträdande professor emeritus i matematikdidaktik.

Eva Taflin är fil lic och universitetsadjunkt i matematikdidaktik.

Kerstin Hagland är universitetsadjunkt i matematikdidaktik.

Alla vid Högskolan Dalarna.