Gemensam problemlösning

***Peter Sandin** är högstadielärare och arbetar med utvecklingsarbete i Stockholm inspirerat av ett seminarium med Dr Timothy E. Erickson, EQUALS-projektet. USA-projektet började 1977 vid Lawrence Hall of Science, i Kalifornien. Det är ett jämställdhetsprogram med målsättning att bistå elever, som inte klarar av matematikkurserna. Arbetet har nu spridit sig till femton ställen i USA och till Australien, Nya Zeeland, Costa Rica, Danmark och Sverige. Det senast utgivna materialet är **Get it together**, som beskrivs i artikeln. I slutet ges ett par exempel från materialet.*

Bakgrund

Det räknas för mycket och talas för lite på matematiktimmarna! - är ett påstående som lett till diskussion. *Vad ska man tala om och vem är man?* Samtal mellan lärare och elev är sedan länge ett viktigt moment i lärarutbildningen. Kunskaper om diskussioner mellan elever är få och det undervisas mera sällan om dessa i lärarutbildningen. Även om den "tysta räkningen" blir ovanligare, vet vi inte säkert om vad, hur och på vilket sätt eleverna diskuterar.

Problemlösning

Matematikens språk har viktiga referensområden, t ex den abstrakta matematiska världen och den värld av situationer, som kan beskrivas genom en matematisk modell.

Att tala om matematik kan vara svårt, eftersom de matematiska begreppen är abstrakta konstruktioner. Utanför det matematiska symbolspråket, har vi svårt för att diskutera matematik. Barn kan ibland beskriva meningen med formella påståenden och uttryck på ett sätt, som visar att de tänker på symboler som beskriver dessa matematiska begrepp:

Vad är två gånger tre? - Sex. - Hur vet du det? - Jo, två treor.. en trea är tre.. en till blir sex. - Bra, vad är tre gånger två? - Sex. - Något märkligt med det? - Det blev sex igen och de är olika tal.. Låt mig berätta varför det är på det sättet.. Två har flera sätt.. Jo, den har flera sätt..liksom två har flera tvåor, men det är ett lägre tal. Tre har mindre treor men det är ett högre nummer.. På så sätt, när du multiplicerar tre med två. - Hur många fler är det? - Tre.. och på det andra sättet är det två. Men de två .. det är två treor .. men den andra är tre tvåor, eftersom två är småare än tre men två har mer.. flera till, och sen har treorna mindre till men är ett högre tal.

I följande exempel förklarar samma barn sin strategi för att på olika sätt få 64. Först ska barnet skriva om 23 + 41, så att det blir 64. Först skriver barnet 24 + 40 och fortsätter:

- Jag gör ett mindre än 40 och den här mer.. 25 plus 39. - Berätta för mig hur du fick fram det. - Jag låter bara en gå ner.. tar bort en och lägger på den andra.. Jag tar bort 3 (från 23) och gör det till två och lägger det till 41 för att få 42. På samma sätt, så går jag ner, ner och upp, upp.
- Bra, du gav mig tre exempel på hur du kunde ändra talen. Hur kommer det sig nu att alla de här talen blir lika mycket tillsammans? - Eftersom det är att ta bort från ena talet och lägga till det andra. - Får man göra det? - Varför inte? - Kan du berätta för mig varför? - Nej, vem som helst kan göra det. Eftersom du hela tiden har lika mycket. Du behåller det men lägger det på något annat. Man tar inte bara bort det.

Berättelserna visar hur barn kan diskutera matematik. Barnet kämpar för att hitta - och ibland uppfinna - ord för att uttrycka sin kunskap om det matematiska innehåll, som beskrivs av det formella uttrycket. Delvis visar de här exemplen också på barnets brister. Barnets kunskap om denna värld är till stora delar implicit och uttrycks mera genom de olika sätt, som barnet kan använda talen på, än genom en utvecklad förmåga att prata om dem. (Gelman & Greeno, 1988)

Dagmar Neuman ger i sin bok *Räknefärdighetens rötter*, illustrativa exempel på, hur barn försöker att förmedla sina tankar om symbol språket. Marit Høines, har i sin bok, *Matematik* *som språk* många exempel på hur barn talar om matematik.

Lampert (1986) beskriver hur elever i ”fourth grade mathematics classes” diskuterar innebörden i matematiska uttryck och försöker övertyga varandra (och Lampert) om att de olika aritmetikalgoritmer de uppfinner är korrekta. Eleverna inte bara gör matematik - de diskuterar, argumenterar och debatterar matematik. Det är en viktig målsättning för Lampert i hennes arbete som lärare. På sätt och vis behandlar eleverna matematik som ett dåligt strukturerat ämne. Det är därför legitimt att ha olika åsikter. Påståenden måste rättfärdigas, inte enbart beroende på om de är korrekta eller inte, utan om de är begripliga.

Schoenfelds arbete med gymnasie- och högskoleelever (1985), har många likheter med Lamperts lektioner. Lärarens roll är att ”tänka högt” under problemlösning och på så sätt visa eleverna de processer, som ofta genomförs i det tysta. Fördelar är att eleverna ibland hittar på problem åt läraren, som ibland låtsas mera brydd än vad som behövs, för att visa hur flera lösningsförsök kan utvecklas.

En helt annan inriktning, med utgångspunkt i Piaget och den europeiska socialpsykologiska skolan, försöker ge bevis för teorin om att gemensam problemlösning borde gynna den allmänna mognaden och utvecklingen. Viss forskning visar, att blotta diskussionen av klassiska Piagetproblem kan öka förmågan även om de diskuterande har lika dåliga förkunskaper. Det skulle då kunna eliminera möjligheten att en duktigare elev lär ut ett nytt beteende till en mindre duktig kamrat. Det verkar som om själva kontakten mellan eleverna får igång en konstruktiv inlärning.

Att delta i gemensam problemlösning bidrar tydligen till att deltagarna får erfarenheter, som kanske är viktiga för att de ska kunna utveckla sin skicklighet som problemlösare.

Ytterligare en effekt av gemensam problemlösning är det många kallar motivation. Genom att eleven uppmuntras att pröva nya lösningsmetoder och får uppmuntran, stärks självförtroendet. Den gemensamma problemlösningen ger social status, berättigande och disposition för att lösa problem. Med disposition menas inte den läggning eller fallenhet som kan anses som en biologisk eller ärvd egenskap, utan något man kan lära sig och därför också undervisa om.

Det finns goda skäl att tro, att deltagandet i gemensam problemlösning kan lära elever att de har förmåga, tillstånd och även skyldighet att medverka till en oberoende tolkning och inte automatiskt godta problemformuleringar som givna.

Problem med problemlösning

Att t ex överföra vissa metoder för lästräning till problemlösning i matematik är inte så enkelt som man till en början kanske tror. För det första är problemlösning i matematik mer kunskapsberoende än metoder för läsning. En del av framgången med den gemensamma lästräningen är att samma typ av aktiviteter – fråga, sammanfatta, förklara och tolka - genomförs om och om igen. Att hitta moment som kan upprepas på liknande sätt i matematik är inte lätt. I läsning har dessutom elever sällan helt fel, utan de är "bara" svaga i läsning. I matematisk problemlösning hamnar eleven ofta på felaktiga spår, som påverkar själva lösningen.

Polya-inspirerade modeller är enligt Schoenfeld så allmänna till sin karaktär, att de ger föga hjälp till människor som inte redan är bra på att lösa matematiska problem.

Det är också svårt att klassificera matematikproblem, vilket kan vara nödvändigt för att öka svårighetsgraden i övningar och för att bedöma elevresultat.

Det återstår alltså stora problem att lösa för att vi ska kunna få stöd i forskning för att tillämpa framgångsrika metoder för lästräning och använda den inom problemlösning i matematik.

Man bör söka en uppsättning repeterbara (och allmänna) aktiviteter, som elever kan använda och utveckla vid många problemlösningar.

Man bör hitta en tillfredsställande balans mellan uppmärksamhet på allmänna problemlösningsstrategier och processer samt uppmärksamhet på den specifika matematik, som behövs i problemlösning.

Vi behöver något sätt att gruppera och klassificera problem av undervisnings- och bedömningsskäl.

Problemlösning i praktiken

Get it together är ett läromedel som vuxit fram ur EQUALS-projektet. Det innehåller matematikproblem som ska lösas i grupp (2-6 elever per grupp). Materialet har tagits fram av lärare, som deltagit i fortbildningskurser och kan användas från årskurs 3 och uppåt. Problemidéerna introduceras för lärare som ”cooperative logic problems”. Varje problem finns på ett speciellt kopieringsark. På arket finns sex ”kort” med ledtrådar (se exempel i slutet av artikeln). På arket kan också finnas etiketter av olika slag, som kan behövas under arbetet i gruppen. Varje problem har samma struktur och samma regler.

Tim Ericksons presentation vid seminariet

När vi introducerar problem för eleverna börjar vi med att förklara tankarna och poängterar att det är gruppen som har ett problem att lösa. Därefter börjar grupperna arbeta. De blir väldigt engagerade. När vi löst några problem, stannar vi upp och pratar om hur det är att lösa matteproblem på det här sättet. Några vanliga elevkommentarer: Alla har en roll att fylla. Det är lättare med "många huvuden"!. Jag såg andra som gjorde på ett annat sätt. Vi visste när vi var klara! Läraren avgör inte när man är färdig och det finns inget facit! Läraren besvarar bara frågor, om alla i gruppen är överens om att man vill ha hjälp. Att arbeta i grupp ger självständig inlärning. Kamrater kan förklara och bedöma, om gruppen har lyckats."

I förordet framhålls

Eleven i gruppen får uppleva:

- *Alla har en uppgift att fylla.* Det är det första eleverna säger, och det är också den största vinsten utifrån jämställdhetsmålet. När lärare pratar, slår många elever dövörat till. När elever är i en grupp, är de nästan alltid engagerade.
- *Det är lättare om man är flera* är en annan vanlig elevkommentar. Självklart är det så, eftersom chansen finns, att någon annan i gruppen upptäcker det vi inte ser.
- *Andra grupper gör annorlunda.* Det upptäcker eleverna tämligen omgående och det finns många sätt att lösa ett problem. Man får insikt i matematiska metoder, som hjälper oss nu och senare.
- *Man talar matematik* genom att en massa matematikord används i diskussionen. Att använda matematikens språk är mer än bara lära sig glosorna. "Att tala matematik" hjälper oss att befästa vår förståelse av den matematik som finns bakom uttrycken.
- *Man avgör själv, när man är klar.* När eleverna löser problemen försöker vi undvika att tala om för grupperna om svaret är rätt eller fel, och vi svarar inte på frågor, såvida inte alla i gruppen är överens om att man vill ha hjälp. Att arbeta i en grupp befrämjar självständig inlärning. Eleverna upptäcker, att läraren inte ensam besitter kunskap. Kamraterna kan förklara och bedöma om man gjort rätt eller inte.

Den sociala förmågan utvecklas:

- *Att följa spelreglerna.* De kan innefatta att inte fråga läraren, såvida inte alla i gruppen är överens om att de inte vet.
- *Se till att alla får vara med.* Det ska betyda att alla får röra materielen. Den kan bestämmas av eleverna alltefter problemets art.
- *Lyssna till vad andra har att säga.*
- *Försöka motivera sina uttalanden.* Det är något vi alla behöver kunna och det är en förmåga som man har svårt att lära sig.
- *Fråga andra om deras synpunkter.*
- *Hjälpa andra utan att tala om, vad de ska göra.*
- *Ta emot hjälp om man behöver.* Hjälp ska i första hand komma från gruppen, i andra hand från läraren.

Fördelar för läraren

Enklare övervakning med färre "små enheter" I stället för helklass får du 7-8 grupper. Det betyder att du i lugn och ro kan hjälpa grupper som verkligen brottas med svårigheter.

Mer tid kan ägnas åt observation av eleverna. När du rör dig i klassrummet, ser du elever som löser problem och det finns tid över för dig att observera. Du kommer att få bättre chanser att upptäcka vad de verkligen tänker på.

Ytterligare fördelar

Att eleverna under matematiklektionerna ibland får arbeta gemensamt, ibland var för sig och även får traditionell undervisning leder till mera variation. Om vi är intresserade av jämlikhet, önskar vi erbjuda så många olika inlärningstillfällen som möjligt.

Problem som dessa kan öppna dörren för en integrering av andra ämnen i matematiken. Det kan också förmå elever att intressera sig mer för ämnet och visa, att matematik kan vara värdefullt även utanför matematiktimmarna.

Ytterligare ett resultat av gemensam problemlösning är framgången. Grupperna löser verkligen dessa problem – ofta problem som är så komplexa, att ingen enskild i gruppen kan lösa dem. Den här framgången kan stärka självförtroendet - både deras och ditt.

Alla elever – från de duktigaste till de svagare – har stor nytta av att lära sig berätta och förklara med tydlighet och skärpa.

Man upptäcker, att svaga elever är effektiva och hängivna gruppmedlemmar och starka elever kanske upptäcker, att de inte kan hindra gruppens lösning. Att lära sig arbeta gemensamt är viktigt i sig. De flesta arbeten kräver samarbete, trots att det inte verkar som om det undervisas explicit i något skolämne. Speciellt gäller detta förhållande inom matematikämnet.

Vill du pröva?

Flera lärare runt om i Sverige på mellan-, hög- och gymnasiestadiet, har redan prövat materialet med hjälp av en översättning av några korta utdrag ur boken, som gjorts med författarnas tillstånd. Hör gärna av dig till: Stockholms skolor, Peter Sandin, Box 22007, 104 22 Stockholm.

Referenser:

Charles R. I. & Silver E. A. (Ed). (1988). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, Lawrence Erlbaum Associates

Erickson, T. (Ed). (1989). *EQUALS. GET IT TOGETEHER, Math Problems for Groups Grade 4-12*, Lawrence Hall of Science, University of California, Berkeley

Johnsen Høines, M. (1990). *Matematik som språk.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Inc.

Här följer ett par exempel på problem med tillhörande etiketter på nästa sida:

Fyra med fikon

Innehåll: Föralgebraisk aktivitet. Lösning av "ekvationssystem" med hjälp av laborationsmateriel.

Materiel: Etiketter som du klipper ut från arket med ledtrådskorten, se nästa sida. Minst två slags laborationsmateriel för markering.

Övningar: **Fyra med fikon**

Kännetecken: Observera att problemet har flera lösningar. Ett kort skall inte delas ut.

Med den här typen av problem kan eleven göra erfarenheter som kan bli till hjälp vid studier i algebra. Övningarna är värdefulla genom att de ökar förståelsen för variabelbegreppet. Dessutom visar uppgifterna på möjligheten av att framgångsrikt använda laborationsmateriel vid problemlösning.

Tändsticksproblem

Innehåll: Geometri och mätning av geometriska storheter. Mätning av omkrets och sidornas längd med hjälp av alternativa enheter (stickor).

Ordlista: Regelbunden och oregelbunden polygon, likbent och liksidig triangel, fyrhörning, omkrets, vinkelspets, bas, kongruens.

Materiel: Varje grupp skall ha minst femton stickor. Det går lika bra med tandpetare, sugrör, pennor, etc. Det enda kravet är att de skall vara lika långa. En ordbok/uppslagsbok bör finnas till hands.

Övningar: **Tändsticksproblem**

Kännetecken: Gruppen gör en geometrisk konstruktion med hjälp av stickor. En del problem fordrar ett klart resonemang och systematisk genomgång av alla möjligheter. Det finns t ex två sätt att göra en triangel av sju stickor, utan att de korsar varandra, men det finns bara ett sätt med sex eller fem och inget sätt med fyra.

Fyra med fikon

Lars och Nanna har sju fikon tillsammans. Hur många fikon har var och en?

Fyra med fikon

Lars och Mona har fem fikon tillsammans. Hur många fikon har var och en?

Fyra med fikon

Om Nanna och Oscar lägger ihop sina fikon har de tolv tillsammans. Hur många fikon har var och en?

Fyra med fikon

Om Oscar och Mona lägger alla sina fikon i en korg har de tio fikon där. Hur många fikon har var och en?

Fyra med fikon

Om alla fyra lägger ihop sina fikon och delar upp dem, så får var och en fyra, men det blir ett fikon över. Använd materiel!

Fyra med fikon. Dela inte ut kortet!

Problemet har flera lösningar. Förbered dig med frågor till gruppen, t ex *Bra, ni har löst problemet. Kan ni hitta en lösning till,* eller *Bra, nu har alla löst problemet. Låt oss berätta!* Man kommer att finna olika svar.

Tändsticksproblem

Figuren består av elva stickor. Stickorna är obrutna och de korsar inte varandra. Lägg figuren!

Tändsticksproblem

Ingen sticka är utanför femhörningen.
Lägg figuren!

Tändsticksproblem

Alla trianglar är liksidiga, men inte femhörningen. Alla stickor är lika långa. Lägg figuren!

Tändsticksproblem

Figuren har fyra trianglar.
Lägg figuren!

Tändsticksproblem

Varje triangel har stickor som också finns i två andra trianglar. Lägg figuren!

Tändsticksproblem

En av trianglarna är större än de andra tre. Lägg figuren!