

Grundläggande vinkelbegrepp

Inför ett projekt samlade och läste artikelförfattaren forskningslitteratur som undersöker hur elever tillägnar sig ett grundläggande vinkelbegrepp. Här ges en sammanfattning som beskriver några vanliga svårigheter och förslag på korta lektionsaktiviteter som kan förebygga att missuppfattningar av vinkelbegreppet uppstår.

Mariko och Rick, 9 år, på väg in efter rasten.
– *Såg du att Arman gjorde en tre-sextio?*
– *Ja, och Gabriel lyckades med en fem-fyrtio.*

När läraren som hörde samtalet frågade vad de menade förklarade pojkarna att Arman hade snurrat sin skateboard ett varv i luften och Gabriel hade snurrat sin ett och ett halvt varv. Pojkarna hade fångat upp och tillämpade nu ett språkbruk som beskriver storleken på en rotation inom denna sport. Men – vad förstår de egentligen?



Begreppet vinkel

Vinkelbegreppet kan beskrivas dynamiskt som *storleken på vridningen av en linje eller ett plan för att sammanfalla med linjen, planet eller dess parallell* eller statiskt som att en vinkel är *området mellan två strålar eller sträckor som möts i (alternativt utgår ifrån) en gemensam ändpunkt*. Strålarna eller sträckorna kallas vinkelben och den gemensamma ändpunkten vinkelspets. Termen vinkel används också om vinkelns storlek, alltså den rotation som fordras för att överföra det ena vinkelbenet till det andra. En vinkel mäts i grader eller radianer men elever i grundskolan möter i regel enbart grader. Vinklar kan beskriva

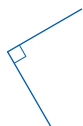
- ◇ en abstrakt relation, t ex skillnaden mellan två linjers eller strålars lägen
- ◇ början och slutet på en vridningsrörelse eller ett svep, t ex ett knäns eller en armbåges böjning
- ◇ relationen mellan ett objekts rörelse i förhållande till ett permanent drag i omgivningen, t ex förhållandet mellan lutningen på ett flygplan som lyfter eller landar och den horisontella landningsbanan.

Elever möter under sin grundskoletid vinklar med *två linjer*, t ex i rumshörn, saxar, vägkorsningar och kroppsleder, vinklar med *en linje*, t ex dörrar, klockvisare, dörrhandtag, vindrutetorkare och sluttningar, vinklar *utan linjer*, t ex i hjul, åkattraktioner på nöjesfält, piruetter och vissa typer av gångjärn. Den sistnämnda vinkelgruppen har i studier visat sig vara svåra att förstå och hantera också för elever upp i högstadieåldern.



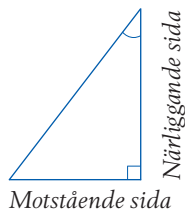
Vinklars egenskaper påverkas av deras *position* och *vinkelbenens längd*. Vinklarnas position påverkar särskilt de yngre elevernas bedömning av vinkelns storlek. Förklaringar som att vinklar är lika stora "för att det ser ut så" minskar efterhand och relativt snabbt förstår många elever att storleken inte förändras om vinkeln förflyttas eller vrids. Olika positioner får allt mindre inflytande medan manipulationer med strålarnas längd fortsätter att starkt påverka elevernas bedömning om likhet mellan vinklar. En vanlig missuppfattning som dröjer sig kvar länge hos många elever är att vinkelns storlek ändras i förhållande till hur avståndet mellan strålarnas ändpunkter ökar eller minskar, dvs förändras i relation till förändringar av vinkelbenens längd.

Några andra missuppfattningar



Det kan finnas missuppfattningar om att räta vinklar i olika positioner är olika stora. Dessa elever relaterar vinkelmåttet, förutom till vinkelbenens längd och avståndet mellan deras ändpunkter, också till lutningen på den övre strålen. Inte bara elever utan även många vuxna har föreställningen att i en 90° -vinkel måste en stråle vara horisontell. Det visar att variation av vinklars position är nödvändig och därför bör undervisningen innehålla aktiviteter där elever får vana och erfarenhet av att det ena vinkelbenet i en rät vinkel inte måste vara horisontellt orienterat. Svensktalande elever har i vart fall inte den missuppfattning som engelsktalande elever kan ha vad beträffar 'right angle'.

Senare i elevernas skolgång kan orden 'motstående' och 'närliggande' behöva tas upp till diskussion. En motstående sida kan mycket väl "ligga ner" i förhållande till papperets orientering.



Elever kan också fokusera området som avgränsas av det triangelformade utrymmet mellan strålarna och hur nära varandra sidorna i den triangeln är. När strålarna i 60° -vinkeln förlängs, anser en del elever att den inte längre är spetsig.

Mäta vinklar

Vinkelmåttet är en relation mellan delarna hos en form, dvs en egenskap, som baseras på cirkelns delning i 360° . Elever som vet att ett helt varv är 360° kan relatera till det, precis som pojarna i inledningen gjorde. I vardagen kan elever se att när fyra skolbänkar sätts samman till ett gruppbord, möts fyra 90° -vinklar i centrum och utgör tillsammans 360° . Läraren kan då uppmärksamma eleverna på sambandet till cirkelns medelpunkt genom att vika ett cirkelformat papper i fjärdedelar, lägga det på gruppbordets centrum och påvisa den räta vinkeln. Sedan kan eleverna få upptäcka den rika förekomsten av räta vinklar i omvärlden. Viker de pappret en gång till kan de titta på den halverade 90° -vinkeln, dvs 45° , som återfinns i tex lister runt dörrar och fönster och på tavelramar. Elever skiljer i regel först mellan spetsiga och trubbiga vinklar och de får referenspunkter att relatera till när undervisningen uppmärksammar vardagsnära erfarenheter av vinklar som större eller mindre än 90° och 45° . När den raka vinkeln, 180° , är känd kan den också fungera som referenspunkt. Därefter brukar elever kunna sortera vinklar i storleksordning och behovet av en enhet uppstår så småningom.

För att upptäcka att "vinklar fanns före gradskivan" kan lärare introducera en "kil"-uppgift. Eleverna får var sitt tunt papper och med hjälp av det ska de uppfinna ett verktyg att mäta vinklar med. En restriktion är att de inte får använda ordet "grader" när de ska förklara hur verktyget ska användas. Eleverna viker då ofta sina papper till ungefärliga trianglar och kan beskriva

sitt verktyg som exempelvis "en fjärdedel av ett hörn". Aktiviteten har flera syften: att eleverna får erfarenhet av en icke-standardiserad måttenhet, de kan upptäcka vinkelmått och de kan utveckla idén om "grader" som en mycket liten "kil" av vinkelutrymmet.

När elever börjar använda gradskiva för att mäta vinklars storlek, har de ofta svårt att veta var de ska avläsa, vilket liknar problemen med att avläsa linjalen vid längdmätning. Vid inläring av olika slags mätning behöver elever möta situationer där de mäter både direkt och indirekt, liksom att de får möta ostandardiserade enheter innan de börjar använda standardiserade enheter. Med andra ord, för att kunna ange en vinkels storlek är det nödvändigt att förstå likadelning och enhetsiteration, precis som vid mätning av andra geometriska egenskaper. För att förstå vinkelbegreppet behöver eleverna utveckla olika föreställningar om vridning genom att följa en vridande rörelse och relatera spår i omgivningen till vridningar. Vardagliga representationer av dessa aspekter uppmärksammas inte lika ofta som spatiala strukturer i längd, area och volym.

Hur vinkelbegreppet introduceras

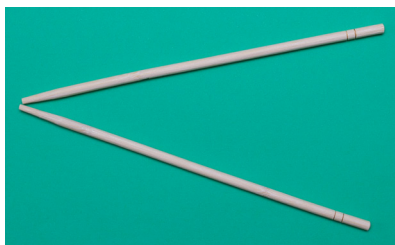
Vinklar är framträdande drag hos former och för utveckling av elevers förståelse för geometri behöver de på olika sätt undersöka vinklar redan i början av sin skolgång. Det är då nödvändigt att deras lärare förstår vinkelbegreppets komplexitet. Några forskare (Browning mfl, 2007) grundar sitt intresse för vinkelbegreppet på erfarenheter av lärarstudenters svårigheter med att förstå vinklar och vinkelmått. De ställde frågan *Hur skiljer sig mätning av en sida från mätning av en vinkel?* Många lärarstudenter svarade: *När vi mäter en sida mäter vi en längd, men en vinkel mäts i grader.* Sådana svar visar på utmaningen att förstå skillnaden mellan ordet vinkel och dess måttenhet. För dessa studenter är vinkeln enbart ett objekt med något som kallas grader. Men vad är grader? Vad mäter grader egentligen? Svårigheten som många elever, oavsett årskurs eller ålder, har med att definiera vinklar på ett tydligt sätt, tyder på att det är nödvändigt att undersöka hur begreppet hanteras i tidiga skolår. Enligt forskare introduceras begreppet traditionellt på ett statiskt sätt, tex "där två sidor i en månghörning möts, bildas en vinkel". De hänvisar till olika studier med nioåringar och äldre, som visar att undervisningen borde hantera vinklar mer eftertänksamt och att en enkel definition som "två strålar med gemensam ändpunkt" kan hindra elevernas utforskande av det abstrakta begreppet. Eleverna behöver dela med sig av och utmana varandras idéer.

När undervisningen betonar olika situationer, låter elever upptäcka likheter och olikheter genom att de bland annat får gestalta vinklar, kan det leda till att många elever utvecklar sofistikerade begrepp om vinklar redan i tioårsåldern. Elever behöver rik erfarenhet av olika aspekter av vinkelbegreppet: vinkeln som rörelse, vinkeln som en geometrisk form och vinkeln som ett mått. För att erfarenheterna ska leda till en stabil förståelse måste undervisningen samordnas och integrera de olika aspekterna. Det är en utmaning eftersom de olika aspekterna inte har lika framträdande plats i vardagen.

Att storleken på en vinkel hör ihop med hur öppen den är bör betonas starkt i undervisningen. Att utgå från vinklar som rörelse kan underlätta för förståelse och undersökande aktiviteter bör vara en utgångspunkt i undervisningen. För att eleverna ska förstå vinkelbegreppet måste undervisningen betona och synliggöra vinkelspetsen, vinkelbenen och öppningens storlek, och förhållanden dem emellan. Det tycks vara så att elever förstår innebörden i vinkelbegreppet

långt tidigare än de kan uttrycka sin förståelse verbalt. Elevers utveckling påverkas av utformningen av utforskande aktiviteter, vilka redskap och mätverktyg som används, och deras egna dokumentationer. Det viktigaste är alltså inte att tidigt kunna beskriva med ord, men naturligtvis bör läraren använda korrekt terminologi och uppmuntra eleverna att gå från ett vardagsspråk, som de ofta kompletterar med gester, till ett mer strikt matematiskt språk.

Med tanke både på den vardagliga förekomsten av vinklar och komplexiteten i vinkelbegreppet, är det inte överraskande att elever tidigt formar olika föreställningar om vinklar men att dessa inte alltid samordnas. Forskningsrapporter som konstaterar att elever har svårt med vinkelbegreppet beskriver att problemen beror på att det är ett mångfacetterat begrepp och att elever har svårt för att samordna dynamiska och statiska aspekter av begreppet. Elever har särskilt svårt att relatera vinklar till vridning runt en punkt, som exempelvis en sväng runt ett gathörn. Begreppen vridning eller rotation används sällan spontant av elever när de ska ge exempel på vad vinkelbegreppet innebär. De uppfattar inte heller samband mellan vridningar, exempelvis med den egna kroppen. Lutning är ett annat exempel som elever har svårt att relatera till vinklar. Det är i regel enklare att avgöra en vinkels storlek om två pinnar ligger på ett underlag än om en pinne har satts så den står upp från exempelvis ett bord.



En vinkel med två konkreta vinkelben och en vinkel där det ena vinkelbenet enbart kan uppfattas genom jämförelse med bordsskivan.

I en studie (Lehrer mfl, 1998) var det färre än 10% av lågstadiel eleverna som kunde beskriva eller representera vinklar i dynamiska sammanhang, som vridning eller rotationer. När de övriga eleverna skulle ange storlek på olika öppningar mätte de avståndet mellan objektens ändpunkter, precis som i statiska sammanhang, oavsett årskurs, uppgift eller fas i studien.

Trots att vinkel- och vridningsmått är svåra och inommatematiska begrepp finns det goda skäl till att införa begreppen tidigt i skolans matematikundervisning. Studier visar att:

- ◇ barn redan i tidiga åldrar använder vinklar intuitivt och underförstått när de pusslar och bygger med klossar; de placerar klossar parallellt med varandra och i räta vinklar, och de kan bygga med klossar i flera lager och justera så att en kloss placeras vinkelrätt ovanpå en annan
- ◇ barn kan redan i förskoleåldern upptäcka vinklar där båda vinkelbenen är synliga, t ex hörnet i ett rum, vägkorsningar och skänklarna på en sax, de använder ordet "hörn" och andra beskrivande uttryck
- ◇ i femårsåldern kan barn använda vinklar för att beskriva var i en cirkel objekt är placerade och de kan hitta vinklar som är lika

- ◊ elever i förskoleklass kan jämföra vinklars storlek på ett konkret sätt och beskriva dem som ”små” eller ”stora”, jämföra vinklar på olika trianglar genom att lägga dem på varandra, och ibland hålla två separata linjer i minnet och avgöra om de kommer att korsa varandra eller inte.

Den huvudsakliga svårigheten med att lära sig känna igen fysiska vinklar i särskilda sammanhang är att identifiera vinkelns två linjära delar. Studier bekräftar vikten av att känna igen och se likheter oberoende av sammanhang, vilket är grundläggande för inlärningsprocessen. Där bara en linje i vinkeln är synlig, som i lutningen på ett dörrhandtag, är vinkeln svår att uppfatta eftersom eleven då måste kunna föreställa sig den andra linjen. För att förstå lutning som en vinkel bör eleverna därför vara bekanta med begreppen *horisontell* och *vertikal*.

Begreppen *parallella* och *vinkelräta linjer* kan vara problematiska att lokalisera i former. Olika erfarenheter visar att barn har potential att förstå mycket mer än att geometriska figurer har hörn. De kan lära sig att på ett tillförlitligt sätt skilja mellan olika stora vinklar och mentalt dela upp former utifrån egenskaper som längd och vinklar. Ändå blandar de ofta ihop längd- och vinkelmått, vilket tydligt visar att undervisningen särskilt måste uppmärksamma mätning av vinklar och vridning och hur de mätten anges och används. Barn gör informella jämförelser av vinklar och vridningar och därför bör storlek på vinklar tas upp redan i undervisning om former. Kanske är det svåraste steget att integrera vridning, dvs en dynamisk förståelse av måttet på en rotation, i förståelsen för vinklar. Sambandet till fysisk rörelse är en kritisk faktor för undervisningen. Först lär sig barn om vridningsmått utifrån fysiska rotationer, särskilt med den egna kroppen och utvecklar hållpunkter och riktmärken för vissa vinklar och hur mätten på dessa uttrycks numeriskt. När vridningar med hela kroppen successivt byts ut till en arm, en hand, ett finger blir processen synlig och formar inre bilder som representerar dessa rörelser, eleven får en ”inre gradskiva” att använda för att mäta vridning.

Undervisning och lärogångar

Samtal som förs mellan elever och med läraren driver på utvecklingen av förståelse för vinkelbegreppet. Genom diskussioner får läraren insyn i elevernas tänkande, vilket ger läraren förutsättningar för att planera den fortsatta undervisningen. Följande exempel på beskrivna lärogångar kan ligga till grund för kollegiala diskussioner och planering av undervisning av vinkelbegreppet. Hoffer & Hoffer (1992) sammanfattar och beskriver tre didaktiska huvudperspektiv för vinkelbegreppet:

Rotation eller *vridning* är naturligt för yngre elever. Med utgångspunkt i deras erfarenheter bör undervisningen om denna dynamiska aspekt starta tidigt och fortsätta under hela skoltiden.

Fasta figurer refererar till elevers erfarenheter av hörn i exempelvis byggnader, möbler, trappor och som lutningar. Detta statiska sätt att se på vinklar, där vinkeln uppfattas som två strålar som utgår från en punkt är mindre naturligt för unga elever än det dynamiska.

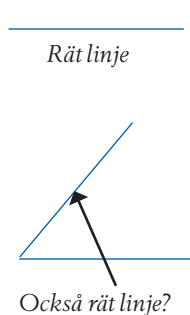
Mätning av vinklar är kanske det minst naturliga perspektivet och det som orsakar mest problem. Vanligen används en gradskiva för att mäta vinklar som representeras som statiska objekt. Eleverna förväntas kunna klassificera vinklarna som spetsiga, räta och trubbiga och ibland som lika stora.

För att knyta samman de tre perspektiven menar forskarna att eleverna ska dokumentera sina erfarenheter av rotationer genom att rita figuren som bildas vid olika rörelser och sedan jämföra storlek på olika rotationer med hjälp av dessa, i direkta och indirekta jämförelser och slutligen i grader.

I tidigare nämnd studie (Lehrer m fl, 1998) genomförd med lågstadiel elever utformades problemuppgifter som gjorde det möjligt att få syn på om eleverna kunde tolka relationer mellan vinklar och särskilja vinklar från helheten hos en figur. Elevernas förklaringar och motiveringar kodades utifrån bland annat vinkelns position, längd på vinkelbenen, avstånd mellan vinkelbenen, vridningsrörelse, lika utseende och konventionell vinkelmätning. I studien konstaterades en kunskapsprogression:

0. Eleven kan inte skilja mellan olika vinklar.
1. Eleven urskiljer räta vinklar och prövar sig fram med vinklar som är 30° , 60° och 120° .
2. Eleven särskiljer 30° och 60° från 90° och 120° , och prövar sig fram för att bestämma vilken vinkel som passar i det efterfrågade sammanhanget.
3. Eleven särskiljer trubbiga, räta och spetsiga vinklar.
4. Eleven särskiljer alla vinklar och gör inga misstag.

De problemtyper som undersöktes baserades på följande uppgifter som eleverna fick möta i enskilda intervjuer:



Vinklar som viker av från en rät linje. Eleverna fick först rita en rät linje och förklara varför den är rät. Därefter fick eleven se en linje med en lutning på 50° från vertikallinjen och svara på frågor som: Är den också rät? Varför?

Jämföra vinklar. För att få syn på vilka särdrag som var mest relevanta när elever jämför vinklar, fick de bedöma vilken av tre vinklar som var mest lik en förlaga. De skulle särskilja spetsiga vinklar från trubbiga och spetsiga vinklar från rätvinkliga. Forskarna studerade effekten av olika längd på vinkelbenen när vinkelns storlek var konstant respektive positionen på en konstant vinkel med lika långa vinkelbenen.

Mäta vinklar. Eleven fick hitta på ett sätt att mäta öppningen mellan de båda delarna i ett gångjärn liksom mellan en öppen dörr och själva dörröppningen, ett böjt sugrör och en böjd piprensare.

Rita vinklar. Eleverna skulle rita tre olika vinklar och förklara hur de skilde sig åt. Antalet "riktiga" vinklar och förklaringar om skillnader noterades.

Konstruktion med sugrör och kopplingar. Eleverna fick låtsasbeställa material för att kunna bygga likadana former som förlagorna som var en stor och en liten kvadrat, en liksidig triangel, en rektangel, en parallelogram, en stor och en liten romb samt en parallelltrapets. Delarna bestod av rör (sugrör i två olika längder) och kopplingar (fasta bitar med vinklar i 30° , 60° , 90° och 120°). Elevernas val av delar och deras beskrivningar av olika vinklar antecknades. Om en elev inte kunde urskilja vinklar i helheten antogs att elevens val av kopplingar var slumpmässiga, medan en elev som särskiljde 90° -vinklar från andra förväntades kunna konstruera kvadraterna och rektangeln men inte övriga former. Tre ytterligare nivåer noterades där eleverna kunde (1) skilja mellan stora och små vinklar men inte mellan vinklar inom grupperna, (2) skilja 90° och 120° från spetsiga vinklar och (3) skilja mellan alla vinklar.

I forskningslitteratur (exempelvis Mitchelmore & White, 2000) finns olika men snarlika principer för undervisning av vinkelbegreppet.

Igenkänning: Eleverna undersöker en mängd olika vinklar i olika sammanhang för att lära sig känna igen deras särdrag.

Likhet: Eleverna gör både direkta och indirekta jämförelser och får även arbeta med andra sätt att uppmärksamma likheter mellan vinklar.

Direkt jämförelse: t ex genom att hörnet av ett rätvinkligt block passas in i en fönsterkarm eller att en vinkel i två olika block placeras ovanpå varandra.

Indirekt jämförelse: t ex används piprensare för att undersöka om två fasta och åtskilda vinklar är lika stora. "Är vinkeln på spegelramen i entrén lika stor som vinkeln på anslagstavlan i klassrummet?"

Jämförelser är särskilt viktiga för enlinjesvinklar där eleverna ska tolka den enda linjen i förhållande till ett neutralt läge, t ex positionen på en öppen dörr och dess läge när den är stängd.

Selektiv uppmärksamhet: Eleverna identifierar vinkelben, spets och öppning på en vinkel.

Abstraktion: Aktiviteter som syftar till att abstrahera vinkelbegreppet utifrån konkreta situationer. Eleverna ritar vinklar med ungefär rätt storlek och position. Rät, spetsig och trubbig vinkel definierades. Eleverna beskriver vinkelbegreppet med egna ord.

När elever ska beskriva en vinkel med egna ord kan de befinna sig någonstans i följande progression:

1. Eleven ger vaga svar som uttrycker en särskild sorts vinkel, hänvisar till en del av ett särskilt föremål, eller ger ännu mer vagt formulerade beskrivningar.
2. Eleven använder uttryck med två linjer, oftast i kombination med en situation, t ex "ser ut som ett berg".
3. Eleven förklarar att två linjer möts i en spets.
4. Eleven förklarar att vinkeln består av två linjer som möts i en punkt och eleven försöker uttrycka en vinkelrelation mellan linjerna – ord som öppning, vridning, utrymme, area, mellanrum, avstånd, storlek och mått används.

Tyst kunskap

Lågstadiееlever kan beskriva raka eller räta linjer intuitivt som "inga bulor", "inga vridningar", "inga hörn" och "inte sicksack". För att beskriva något som elever vet inte är rakt talar de ofta om kurvor eller gör gester. Nybörjareleverna förstår sällan att en linje som viker av från en vertikal linje kan vara rak eller rät utan kallar den sluttande eller böjd. Flera av de yngsta eleverna i en studie avkodade och samordnade relationer mellan några vinklar i olika figurer, alla gjorde det när de var i tioårsåldern och då sa de sällan att en rät linje inte var rak hur den än var orienterad. Den tysta kunskapen om vinklar tycks öka kraftigt, men några missuppfattningar kvarstår ofta, som att längden på vinkelbenen anger vinkelmåttet.

Några aktiviteter

När forskare beskriver upplägg och genomförda studier kan det ge uppslag till aktiviteter som även kan vara lämpliga för lärare att genomföra i klassrummet. Låt eleverna:

- ◇ matcha och jämföra hörn i tangrapussel, pattern blocks och liknande laborativa matematikmaterial

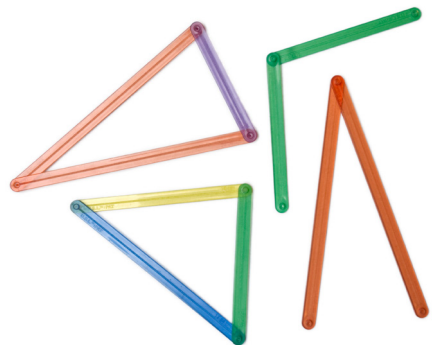
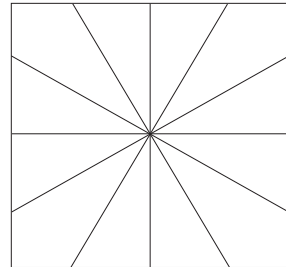


Tangrapussel och pattern blocks, som ibland kallas mosaik.

- ◇ leta hörn, inledningsvis räta vinklar, i och utanför klassrummet
- ◇ tillverka en vinkelmätare eller använda material som geostrips eller anglegs för informell mätning av hörn eller andra vinklar

En vinkelmätare, där varje liten vinkel är 30°, kan ritas upp på genomskinlig plast.

Geostrips och anglegs är produktnamn på plastremsor som enkelt kan sättas samman.



- ◊ beskriva saxars öppning med vinkelbegreppet samt mäta och matcha vinklar i andra objekt, exempelvis tänger av olika slag, där två delar sitter ihop i en svängtapp
- ◊ diskutera vinklar på analoga klockor och titta på hur tidsavstånd som hel, halv och kvarts timma anges
- ◊ tolka och uttrycka hur öppen en dörr är med hjälp av vinklar
- ◊ tolka och uttrycka storlek på sluttningar med hjälp av vinklar
- ◊ undersöka hur många små vinklar med ett bestämt mått som får plats i större vinklar
- ◊ rita av vinklar i ungefär rätt storlek och med ungefär rätt position
- ◊ beskriva likheter mellan vinklar i olika situationer och visa var vinkelbenen och spetsen finns
- ◊ beskriva med egna ord vad en vinkel är.



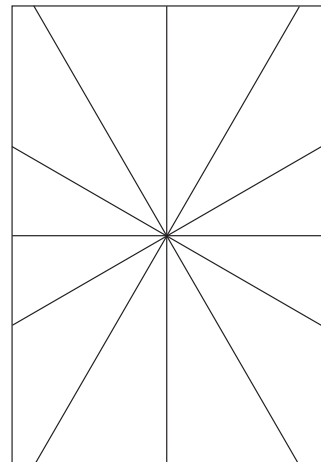
Det är viktigt att elever blir bekanta med fysiska vinklar i sin närmiljö, som exempelvis i byggnader och inredning. Elever som inte är bekanta med exempelvis pattern blocks börjar ofta lägga kreativa mönster istället för att fokusera på blockens hörn. Därför är det av stor betydelse att elever först får bekanta sig med laborativa material som de inte redan är vana vid. I aktiviteter om vilka vinklar skänklarna på en sax kan bilda visar det sig ibland att eleverna inte förstär vilken funktion svängtappen som håller ihop de två skänklarna har. Det är först när de inser det som det är möjligt att diskutera vinkelöppningar. Motsvarande samtal kan föras om leder i kroppen, dörrar och gångjärn.

Introduktionsaktiviteter

Många elever har inledningsvis svårt att identifiera en vinkels delar även när båda vinkelbenen är synliga. I uppgifter med saxar eller tänger kan elever ha en idé om vinkelns öppning, men ändå inte kunna identifiera vinkelben eller spets. Problemet kan hanteras i undervisningen på så sätt att eleverna får dra linjer från svängtappen, dvs skärningspunkten mellan saxens skärblad eller vinkelns spetsen, och utmed saxens skärblad. En liknande svårighet kan gälla vinklar som formas med tex armen. Markera armbågen som en punkt på ett papper och dra linjerna utmed under- och överarm för att synliggöra vinkeln. Gör modeller av knän och armbågar med piprensare och rita av.

Väderkvarnen

Använd vinkelmätaren som presenterades på förra sidan och beskriv den enligt illustrationen till höger. Fråga eleverna om vinklarna i "väderkvarnen" är lika. De flesta tror att vinklarna överst och underst är större än de på sidorna. När de får jämföra alla vinklar med hjälp av exempelvis pattern blocks, överraskas de ofta av att alla vinklar in mot mitten är lika. Uppgiften riktar uppmärksamhet mot vinkelns öppning och visar tydligt att längden på vinkelbenen inte har någon betydelse.



Dörröppningen



Genom konkreta exempel kan elever se när en dörr är öppen olika mycket i förhållande till när den är stängd. De får ett referensläge. Eleverna kan sedan få se en modell av en lös dörr som går att vrida runt vid "gångjärnssidan" men där det saknas referenslinje för stängt läge. En piprensare kan användas för att jämföra öppningen med olika dörrar och luckor vilket hjälper eleverna att hitta den dolda referenslinjen, dvs det andra vinkelbenet.

Programmering och IKT

I flera av de genomgångna forskningsstudierna beskrivs aktiviteter som eleverna får utföra både med den egna kroppen och i olika dataprogram, vanligen genom att programmera hur en sköldpadda ska röra sig. Den teoretiska utgångspunkten är att elever konstruerar sin förståelse för rummet genom handling och inte genom att passivt ta in sinnesintryck. Aktiviteter med och utan programvara kan utveckla föreställningar om och stödja abstraktionen av idén om att en vinkel är ett spår efter en rörelse. Vridningar och vinklar i enkla tvådimensionella geometriska figurer kan relateras till verkliga upplevelser, t ex i promenader där eleverna följer med på en karta eller när de gör snöänglar, och därför vara effektiva för att utveckla elevers föreställningar om vridning och vridningsmått. En fördel med att använda olika programvaror, som blev tydlig i flera studier, var att genom omedelbar feedback upptäckte elever skillnaden mellan det de trodde var korrekta kommandon och den rörelse som sköldpaddan faktiskt gjorde, vilket ledde till att de genast tog reda på och ändrade det som inte stämde.

För att återkomma till pojkarna i inledningen så finns det med hjälp av digitala verktyg stora möjligheter att filma deras skateboardåkande, markera och verkligen låta alla uppfatta hur en tre-sextio eller fem-fyrtio ser ut och hur dessa trick hör samman med vinkelbegreppet.

LITTERATUR

- Browning, C., Garza-Kling, G. & Sundling, E. (2007). What's your angle on angles? *Teaching Children Mathematics*, Vol 14, nr 5, s 283–287.
- Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. I R. Lehrer & D. Chazan. (red). *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hoffer, A. R. & Hoffer, S. A. K. (1992). Geometry and visual thinking. I Post, T. R. (red). *Teaching Mathematics in Grades K-8, Research-Based Methods*. Needham Heights, Massachusetts: Allyn & Bacon.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics* 41, 209–238.

Referenser till den genomgångna forskningslitteraturen finns på Nämnaren på nätet.

