OLA HELENIUS

Kompetenser och matematik

Att försöka skapa strukturer i vad det innebär att kunna matematik är en mångårig internationell trend. Denna artikel anknyter till *Vad är kunskap i matematik* i förra numret. Här presenteras idéer från den danska rapporten *Kompetencer och Matematiklæring*. Åtta delkompetenser som tillsammans utgör den totala matematiska kompetensen bildar ryggrad i de danska tankarna.

I förra numret av Nämnaren presenterade Andreas Ryve tankegångar från den amerikanska rapporten *Adding it up* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) om hur man kan karakterisera kunskap i matematik i termer av olika matematiska kompetenser. Att försöka hitta sådana ramverk för matematikkunskaper är en del av en internationell trend. Våra svenska kursplaner i matematik bär också spår av detta tänkande, även om det kanske bara är i de nya kursplanerna för gymnasiet som det framgår riktigt tydligt. Inte bara inom matematiken förekommer den här typen av tankar utan det finns relaterade tankegångar i mer allmän tappning, mest kända är troligen Blooms taxonomier från slutet av femtiotalet (Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. 1956). För en introducerande beskrivning av Blooms taxonomier, se: en.wikipedia.org/wiki/Bloom%27s_Taxonomy.

Mer sentida arbeten om kunskap i matematik skiljer sig dock ganska mycket från Blooms ideer. Man kan säga att istället för att som Bloom ta utgångspunkt i människans kognition så tar man fasta på matematiken och mer exakt på vad matematiskt arbete innebär. Ett av de mest genomtänkta arbetena kommer från vårt grannland Danmark – det så kallade KOM-projektet (Kompetencer och Matematiklæring). Under ledning av Mogens Niss jobbade en grupp på tolv personer med stor samlad erfarenhet i två år och slutrapporten publicerades hösten 2002 (Niss & Höjgaard-Jensen, 2002). I denna artikel beskrivs några av de tankar som presenteras i rapporten.

Traditionellt brukar en persons kunskap i matematik relateras till vilka delar av matematiken – vilket stoff – som personen i fråga behärskar. På samma sätt brukar man karakterisera undervisning i matematik, dvs innehållet i en kurs beskrivs med hjälp av vilka delar av matematiken som gås igenom. Det finns flera problem med detta tillvägagångssätt. Det är exempelvis svårt att beskriva progression i matematikundervisningen i läroplaner och likaså svårt att jämföra olika läroplaner med varandra.

Även om man betraktar en enskild elev är det svårt att beskriva utveckling och progression av matematikkunskaperna. Visserligen får eleven erfarenheter från allt fler områden inom matematiken alltefter som hon går genom skolsystemet, men det finns många fundamentala matematiska förmågor som man inte har någon kontroll alls över.

De flesta är överens om att matematisk modellering, dvs att kunna tillämpa matematiken, är viktigt. Om vi betraktar de många benämnda problemen i läroböckerna som träning på detta så är det ganska tydligt att det inte finns någon nämnvärd progression i själva modelleringen. Det är bara matematikinnehållet som byts ut.

På liknande sätt kan vi betrakta en elevs förmåga att använda tekniska hjälpmedel (miniräknare, datorer etc). En normalelev tillbringar en stor del av sin "matematiktid" med miniräknaren som sällskap, men de studenter jag möter på högskolan har ändå i allmänhet mycket låg kompetens i att använda miniräknare eller andra hjälpmedel. Inom varje område inom matematiken de stött på har de bara använt miniräknaren på ett elementärt sätt och aldrig utvecklat förmåga att gå djupare in på hur och när en miniräknare kan vara behjälplig i olika sammanhang.

Precis på samma sätt som vi kan identifiera modellering eller hjälpmedelskompetens som en någorlunda distinkt del av det som utgör en viss persons matematiska kompetens kan vi hitta andra delar. I KOM-projektet hittar man åtta sådana delar som tillsammans utgör den totala matematiska kompetensen.

Åtta kompetenser

I KOM definieras *matematisk kompetens* som att vara medveten om, förstå, utöva, använda och kunna ta ställning till matematik och matematisk verksamhet i en mångfald av sammanhang där matematik ingår eller kan komma att ingå. *En matematisk kompetens* är en självständig och rimligt avgränsad del av den totala kompetensen.

De åtta enskilda kompetenser som identifieras delas in i två huvudgrupper som ni kan se i figuren på nästa sida. Senare i artikeln kommer korta beskrivningar av de olika kompetenserna. Illustrationen (hämtad från KOM-rapporten) är tänkt att visa att de olika kompetenserna inte är helt åtskilda utan har många beröringspunkter med varandra.

Att fråga och svara i, med och om matematik handlar om att kunna känna igen den sorts frågor som ofta förekomer i matematik och veta vilka typer av svar matematiken kan leverera. Det handlar också om att själv kunna ställa sådana frågor inom matematiken och kunna formulera om utommatematiska problem i matematiska termer och förstå hur väl den matematiska modellen förhåller sig till verkligheten. Slutligen handlar denna "överkompetens" om att kunna förstå och följa matematisk argumatation samt att själv producera sådana argument vid lösning av problem eller presentation av en lösning.

Att använda språk och redskap i matematik handlar om att kunna förstå, använda och växla mellan olika matematiska representationer. En speciell vikt fästs vid den representation som matematikens symbolspråk och formalism innebär. Att kommunicera i, med och om matematik samt att kunna använda och förhålla sig till tekniska hjälpmedel för matematisk verksamhet är också förmågor som bygger upp denna delmängd av matematisk kompetens.

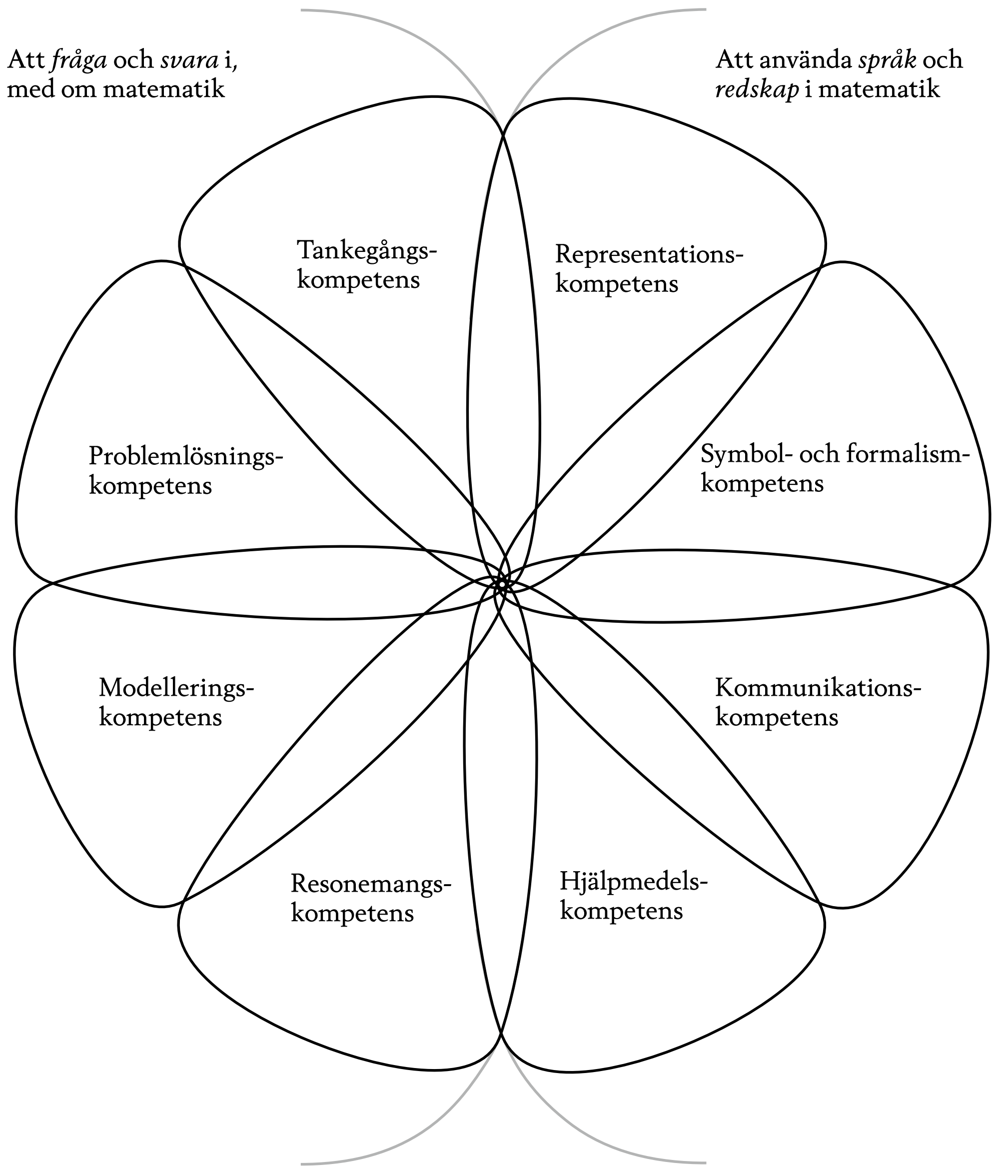
En mycket viktig anmärkning är att kompetenserna ovan endast kan innehas eller diskuteras när de sätts samman med något matematisk innehåll. Poängen är dock att var och en av kompetenserna kan ha mening i vilket matematisk sammanhang som helst och det är det som ger dem dess generella karaktär. På samma sätt har alla kompetenserna mening oavsett var i skolsystemet man befinner sig.

Tre dimensioner

Om nu kompetenserna skall vara generella och täcka hela skolsystemet, i vilka termer kan man då diskutera "hur mycket" av en viss kompetens en viss person innehar? I KOM-projektet har man valt att beskriva detta i tre dimensioner, täckningsgrad, aktionsradie och teknisk nivå:

Täckningsgrad är tänkt att beskriva hur många av de aspekter som karakteriserar en viss kompetens som besitts. En person som själv kan producera ett visst matematisk argument har högre täckningsgrad i sin resonamangskompetens än en person som kan förstå resonemanget men inte producera ett liknande själv.

Aktionsradien för en kompetens hos en person består i hur många olika situationer som personen kan använda kompetensen i. I första hand handlar det om i hur många olika områden i matematiken kompetensen kan aktiveras. En person som endast kan lösa problem av aritmetisk karaktär har mindre aktionsradie



i sin problemlösningskompetens än en som också kan lösa problem inom geometriområdet.

Den *tekniska nivån* hos en kompetens beskriver i hur begreppsligt eller tekniskt avancerade situationer som kompetensen kan aktiveras. En person som med någon lämplig metod bara kan lösa polynomekvationer av grad 1 har lägre teknisk nivå på sin symbol- och formalismkompetens än någon som också kan behandla ekvationer av grad 2.

Undersökande och produktiv

De olika kompetenserna har alla två sidor, en undersökande och en produktiv sida. Den produktiva sidan av kompetenserna handlar om att kunna utföra de handlingar som kompetensen innefattar.

Den undersökande sidan handlar om att kunna förstå, analysera och kritiskt bedöma redan utförda processer. Observera att även detta är aktiva handlingar som den som besitter kompetensen skall kunna utföra.

Beskrivning av kompetenserna

Nedan följer en beskrivning av de åtta enskilda kompetenserna. I KOM-rapporten är denna beskrivning betydligt mer omfattande och den intresserade läsaren rekomenderas att titta där för att få mer kött på benen. Inspirerade av KOM-rapporten inleds varje avsnitt med några frågor och svar, exempel på uppgifter eller dialoger som försöker illustrera något av den som kompetensen handlar om. De flesta av de nedanstående exemplen är direkt hämtade från rapporten.

Tankegångskompetens

- Är det sant att man bland rektanglarna med en given area kan uppnå godtyckligt stor omkrets?
- Ja.
- Kan man också finna rektanglar med godtyckligt stor area bland de med en given omkrets?
- Nej. Kvadraten har den största möjliga arean.

Att utöva matematisk tankegång handlar om att vara klar över vilka slags frågor som är typiska för matematik och att kunna ställa sådana frågor samt ha inblick i vilka typer av svar man kan förvänta sig. Här ingår att kunna skilja på olika typer av matematiska utsagor som satser, definitioner och förmodanden. Att förstå olika begrepps räckvidd samt via generalisering och abstraktion kunna utvidga begreppen till större klasser objekt är också en del av denna kompetens.

Problembehandlingskompetens

- Kan man skapa en triangel med tre godtyckliga sidlängder?
- Nej, om vi placerar ändpunkter på sträckor med längd 3 respektive 2 cm i vardera änden på en sträcka med längd 10 cm kommer de två korta sidorna inte att kunna mötas. Vi får därför ingen triangel.

Att formulera och lösa matematiska problem innefattar att kunna ställa upp olika slag av matematiska problem samt att kunna lösa sådana problem. Med problem menar man här en matematisk fråga som kräver en matematisk undersökning för att kunna besvaras. Vad som är ett problem är alltså inte absolut utan beror på relationen mellan problemställningen och personen som skall jobba med den.

Modelleringskompetens

- Analysera en modell för befolkningstillväxten på jorden mellan 1900 och 2000 som bygger på exponentiell tillväxt.
- Skapa en modell som beskriver hur dyrt det är att prata i mobiltelefon.

Att analysera och bygga matematiska modeller rörande andra områden brukar beskrivas som en process där man översätter en situation från ett annat område än matematik till matematiskt språk och analyserar och bedömer räckvidden av en den uppkomna modellen. Att kunna ”avmatematisera” modellen (översätta tillbaka) ingår också.

Resonemangskompetens

- Alla tal som kvadreras blir större. Det gäller ju för heltalen och därför för alla andra tal också.
- Nej. Dels är påståendet fel och dessutom kan man inte utan vidare generalisera påståenden om heltalen till andra talmängder som t ex de rationella talen.

Att resonera matematiskt betyder att kunna följa och bedöma ett matematiskt resonemang och t ex förstå vad ett matematisk bevis är och hur ett bevis skiljer sig från andra typer av matematiska resonemang. Att kunna tänka ut och genomföra resonemang är den produktiva sidan av denna kompetens.

Representationskompetens

Linjära funktioner kan exempelvis representeras som:

- En algebraiskt angiven funktion, $f(x) = 2x - 1$

- Lösningsmängden till en ekvation, $y - 2x + 1 = 0$
- Ett geometriskt objekt, en rät linje i planet genom punkterna (0,-1) och (1,2).

Att hantera olika representationer av matematiska förhållanden består i att kunna förstå och använda sig av olika slags representationer av matematiska objekt, fenomen, problem eller situationer samt att kunna förstå inbördes förhållanden mellan olika representationsformer. Att kunna välja och översätta mellan olika representationsformer är den produktiva delen av denna kompetens.

Symbol- och formalismkompetens

- I vårt grundläggande talsystem står 406 för fyra hundratal, inga tiotal och sex ental.
- Innebörden av likheten $e^{i\pi}=-1$

Att kunna förstå och hantera matematikens symbolspråk och formalism handlar om att kunna avkoda symbol och formelspråk, att översätta mellan symboliskt matematiskt språk och naturligt språk samt att behandla och använda sig av symbolmässiga utsagor och uttryck.

Kommunikationskompetens

- Varför är $(-1)\cdot(-1) = 1$. Är det något man bara bestämt, eller?
- Ja, kanske det.
- Men varför just 1, varför inte -1?
- Man kanske kan titta på följden $(-1)\cdot 3 = -3$, $(-1)\cdot 2 = -2$, $(-1)\cdot 1 = -1$, $(-1)\cdot 0 = 0$. Nästa vänsterled blir $(-1)\cdot(-1)$, och eftersom högerleden har ökat med ett steg hela tiden verkar det ju rimligt att $(-1)\cdot(-1) = 1$.

Att kunna kommunicera i, med och om matematik innefattar att sätta sig in i och tolka matematikinnehållet i andras presentationer och att kunna utrycka sig på olika sätt och olika nivåer om matematiska angelägenheter.

Hjälpmedelskompetens

- Använd miniräknare för att skissa grafen till x^x och studera vad som händer mellan x=1 och x=0.
- Använd centikuber för att lättare förstå relationen mellan tiotal och ental.

Att kunna använda sig av och förhålla sig till hjälpmedel för matematisk verksamhet betyder att känna till existensen av och egenskaper hos diverse relevanta redskap för matematisk verksamhet, att ha kännedom om deras möjligheter och begränsningar samt vara i stånd till att på ett reflekterat sätt använda sig av sådana hjälpmedel.

Svenska arbeten

Som jag nämnde i början finns det i de gällande svenska kursplanerna beskrivningar av matematikkunnande som liknar de danska kompetenserna vilket gör dessa tankegångar extra intressanta för oss. De gällande gymnasiekursplanerna har t ex tolkats i termer av sex kompetenser av forskare från Umeå universitet (Palm, Bergqvist, Eriksson & Häggström, 2004).

LITTERATUR

Bloom, B., Englehart, M., Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals.* Handbook I: Cognitive domain. New York, Toronto: Longmans, Green.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children learn Mathematics.* Washington DC: National Academic Press.

Niss, M. & Höjgaard-Jensen, T. (2002). Kompetencer och Matematiklæring. *Uddannelsestyrelsens temahaefteserie* nr. 18 - 2002. Köpenhamn, Undervisningsministeriet.

Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, T. & Häggström, C-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion.* Pm Nr 199, 2004. Umeå universitet.