Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?

Trösklar i elevers utveckling av proportionella resonemang

Författarna presenterar även i sin tredje artikel en uppgift där de ingående beräkningarna är busenkla men där eleverna i hög grad resonerar fel. De konstaterar att många elever inte har relevant kunskap om begreppet genomsnittshastighet, fast de utan problem kan manipulera och använda hastighetsformeln. Det vanligaste felet analyseras och en möjlig förklaring till elevernas felaktiga resonemang presenteras.

Begreppet genomsnittshastighet, eller medelhastighet, presenteras för eleverna redan i årskurs 4–6, så när eleverna börjar på gymnasiet bör de ha haft upprepade tillfällen att arbeta med olika situationer som kräver kunskap om begreppet. Dessutom har eleverna erfarenhet av begreppet från en vardaglig kontext. Alla förflyttningar som att gå, springa, cykla eller åka buss kan beskrivas med en genomsnittlig hastighet. Eftersom eleverna har möjlighet att relatera till dessa välbekanta händelser borde de ha goda möjligheter att utveckla en begreppskunskap för genomsnittshastighet. Trots det har det visat sig att elever på gymnasienivå väldigt sällan lyckas med att resonera fram det rätta svaret på följande uppgift:

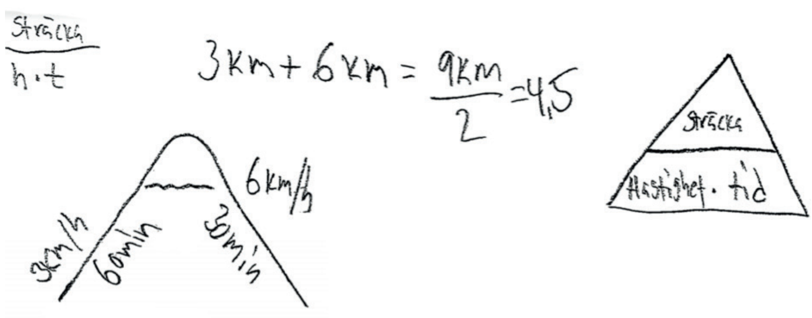
> Det finns en stig upp för en rätt brant backe i Aten. Rickard, som är i god form, går upp för backen i en genomsnittshastighet på 3 km i timmen. Han går ner med dubbel genomsnittshastighet. Vilken är Rickards genomsnittshastighet för hela promenaden?

Ett tips: Om du lägger ifrån dig artikeln och löser uppgiften själv innan du fortsätter läsa kan det vara lättare att förstå kruxet med den och varför eleverna resonerar fel. Uppgiften ser inte särskilt komplicerad ut, så vad gör då eleverna för fel? För att förstå det behöver vi först granska de ingående komponenterna. Centralt i uppgiften är begreppet hastighet – låt oss begrunda det en stund.

Det finns flera nivåer av kunskap om hastighetsbegreppet. I den enklaste formen av situationer som eleverna arbetar med så räcker det att förstå att om de dividerar en sträcka med tiden det tar att förflytta sig längs densamma, får de veta den genomsnittliga hastigheten för färden. Men det krävs att begreppet görs relevant i mer komplexa situationer för att eleverna ska utveckla sin begreppskunskap till att förstå att hastigheten är proportionell mot sträckan då tiden hålls konstant men istället omvänt proportionell mot tiden när sträckan hålls konstant. Däremot är sträckan en bilinjär funktion av tid och hastighet, $s(v, t) = vt$, dvs sträckan är proportionell mot både tiden och hastigheten. I vår uppgift ändrar sig den genomsnittliga hastigheten från 3 km i timmen till det dubbla. Därför fungerar inte den enklaste formen av kunskap, som är att manipulera $s = vt$-formeln för att beräkna ett svar. Här är det ju liksom två hastighetsgrejer i spel! Ytterligare ett problem är att det inte finns någon sträcka angiven. Det finns alltså ett inslag av modellering här eftersom eleverna behöver matematisera sträckans längd på något sätt. Den som har förstått innebörden av begreppet genomsnittshastighet kommer göra det enkelt för sig och anta att backen är 3 km. Det kommer då att ta 1 timme upp och en 1/2 timme ner. Så Rickard har tillryggalagt 6 km på 1,5 timme, vilket ger den elementära beräkningen av genomsnittsfarten till 6 km/1,5 h = 4 km/h.

Det vanligaste felresonemanget

Vad gör då eleverna? Det allra vanligaste felresonemanget ser ut så här: Först går allt bra. Eleverna resonerar sig fram till att dubbla genomsnittshastigheten är 6 km i timmen. Sträckan är lite lurigare men de flesta gör på goda grunder antagandet att det är lika långt upp som ner. Elevlösningar och samtal med elever visar att det är vanligt att de först försöker identifiera kvantiteterna sträcka och tid för att kunna använda $v = s/t$-formeln. Det som sedan händer är att eleverna överger sin första strategi och felaktigt beräknar ett genomsnitt på genomsnitten.



Att beräkna en genomsnittshastighet genom att beräkna genomsnittet för två genomsnittshastigheter vittnar om brister i kunskapen om begreppet genomsnittshastighet. Eleven lägger ihop de olika hastigheterna och dividerar med två: (3 km/h + 6 km/h)/2 = 4,5 km/h. Just den här eleven slarvar både med enheterna och likhetstecknets betydelse men det är ändå lätt att följa hens resonemang. Beräkningen illustrerar det vanligaste felresonemanget på denna uppgift och den är gjord av en elev som utan problem manipulerar $s = vt$-formeln och löser uppgifter baserade på situationer där två av de tre storheterna är givna och den tredje efterfrågas. Uppenbarligen räcker det inte att kunna hantera dessa situationer för att utveckla elevernas kunskap om begreppet genomsnittshastighet.

Representationernas roll för elevernas handlingsmönster

Det är väl känt från psykologisk forskning att språkliga, symboliska och geometriska representationer triggar elevernas handlingsmönster. I det här fallet har vi en intressant språklig representation i form av det sammansatta ordet genomsnittshastighet. Vid en analys av ett 50-tal elevers lösningar och deras muntliga förklaringar till varför de gör som de gör, verkar det som om begreppet hastighet drar tankarna till sambandet $s = vt$ och att begreppet genomsnitt framkallar ett handlingsmönster som innebär att man adderar och dividerar med antalet ingående termer. Vi har alltså en språklig representation i uppgiftsformuleringen som triggar två olika handlingsmönster. Elevexemplet ovan är ett exempel på det. Situationen vållar naturligtvis inte något problem för elever som har en god kunskap om egenskaperna hos begreppet genomsnittshastighet. Men de eleverna verkar vara i minoritet. Vad kan det bero på? En förklaring är att eleverna inte tidigare har erbjudits möjligheter att genom olika situationer utmana sin begreppskunskap om genomsnittshastighet. Så länge $s = vt$ fungerar sker ingen problematisering av de handlingsmönster som man behöver använda för att lösa de uppgifter som ges. Möjligtvis kan uppgifterna kompliceras av att de ingående enheterna är angivna i exempelvis kilometer och sekunder, men det utmanar inte elevernas kunskap om begreppet genomsnittshastighet. Det prövar endast elevens förmåga att hantera enhetsomvandlingar.

Hur vi kan undervisa för att utveckla elevernas kunskap

Hur vi ska undervisa för att utveckla elevernas kunskap är en av undervisningskonstens stora frågor. Det är naturligtvis enkelt att påpeka att elevernas resonemang är fel och visa hur ett korrekt resonemang ser ut, men hur det påverkar elevernas utveckling vet vi mycket lite om. Om eleverna däremot kan erbjudas situationer som gör att de själva inser och kan beskriva varför de har resonerat fel i liknande tidigare situationer, kan vi vara säkra på att eleverna har förstått någonting. Vi föreslår att elever som har resonerat fel får en ny uppgift att lösa innan ni diskuterar lösningen av Brant backe-problemet:

> År 2002 körde en så kallad ghost-rider de cirka 68 kilometerna från Stockholm till Uppsala på 14 minuter och 38 sekunder, vilket innebär en genomsnittshastighet på 273,1 km/h. Antag att han haffades av polisen när han kom fram till Uppsala och att hans motorcykel beslagtogs. Ghost-ridern bestämmer sig för att gå hem till Stockholm. Vilken är hans genomsnittshastighet för nattens aktivitet att ta sig tur och retur Stockholm–Uppsala?

Situationen i den nya uppgiften är så extrem att strategin att beräkna ett genomsnitt på genomsnitten blir absurd. Om man antar att man går i 5–6 km/h skulle strategin att beräkna ett genomsnitt på genomsnittshastigheterna resultera i en genomsnittshastighet på nästan 140 km i timmen. Det är lätt för eleverna att inse att det inte kan stämma. Om vi hyfsar siffrorna lite så har vi en sträcka på 140 km och om vi går i 5 km/h så tar det 14 timmar att gå 70 kilometer. Här är de 14 minuterna för motorcykelfärden försumbara så vi kan lika gärna säga att tiden fram och tillbaka är cirka 14 timmar. En ungefärlig medelhastighet för hela sträckan blir 140 km/14 h = 10 km/h. Efter den här tankeställaren är eleverna oftast väl förberedda för att återvända till backen och revidera sina resonemang med stöd av läraren.

Vad vi kan lära av enstaka exempel

Vi kan lära oss mycket om elevernas utveckling av kunskap om olika begrepp genom att analysera enstaka uppgifter. Här vill vi belysa hur viktig den språkliga representationen är. När många elever gör samma sorts fel på en uppgift så finns det ofta något i den språkliga uppgiftsformuleringen som triggar elevernas handlingsmönster i en viss riktning. Elever som har en god begreppskunskap och inser vilka egenskaper som är relevanta i situationen kommer inte att ledas till fel handlingsmönster av den språkliga representationen som i det här fallet innehåller en sammansättning av de två begreppen genomsnitt och hastighet. Det är naturligtvis en helt naturlig reaktion att aktiveras av det ena eller det andra begreppet om man är van vid att det fungerar. Elevens handlingsmönster inkluderar inte att fundera över räckvidden i de metoder som används. I lösningen ovan ser vi att eleven faktiskt har ritat en bild på ett berg och räknat ut att det tar dubbelt så lång tid att gå upp som ned och troligen ansatt att sträckan upp är 3 kilometer. Dessutom ritar eleven upp *svt*-triangeln, dvs även informationen att hastighet kan beräknas som sträcka delat på tid är tillgänglig. Det är bara ett litet steg kvar till att dela den totala sträckan 6 kilometer på den totala tiden 1,5 timmar för att eleven skulle göra en korrekt lösning. Men ändå överger hen den strategin och triggas istället av termen genomsnitt och beräknar ett medelvärde av hastigheterna. Vilken typ av undervisning skapar då den kunskap som behövs för att undvika detta felresonemang?

Begreppsutveckling sker när eleverna erbjuds olika situationer som utmanar deras kunskap om de begrepp de arbetar med. Elever som inte har arbetat med situationer liknande den i uppgiften kan troligtvis inte genom att bara betrakta hastighetsformeln inse att medelvärdesvarianten är fel. Det är en högre form av matematisk kunskap att kunna dra sådana slutsatser direkt från ett algebraiskt uttryck. Lärare måste alltså låta elever arbeta med situationer av sådant slag att de ingående begreppens viktiga egenskaper blir relevanta för lösningsmetodens giltighet.

I det här fallet är det konkreta kruxet att vi arbetar med en sammansatt storhet som är en kvot av två andra storheter. Sådana kan inte adderas hur som helst och därför går det inte heller beräkna medelvärden hur som helst. Man kan addera två delsträckor för att få totalsträcken och två deltider för att få totaltiden, men inte addera två delhastigheter för att få ”totalhastigheten”. Det inser nog de flesta. Om någon först går i 5 km/h och sedan i 10 km/h kommer nog få elever att föreslå att personen har gått i en takt av 15 km/h. Men tydligen så ligger ändå en medelvärdesberäkning, som är en slags additiv procedur, nära till hands för många. Samma fenomen som det som här illustreras med medelhastigheter gäller även för andra sammansatta storheter som till exempel kilopriser, densiteter eller timlöner.

Hitta gärna själv på några uppgifter av liknande slags som Brant backe men med andra sammansatta storheter och låt dina elever arbeta med dem. Hör gärna av dig till oss och dela med dig av dina erfarenheter av elevernas förståelse för egenskaperna hos sammansatta enheter.

Kursplanen i matematik nämner inget om begreppet hastighet, men det dyker upp i många läroböcker på mellanstadiet. Formellt borde vi använda termen fart eftersom hastighet i fysiken är en vektor som beskriver hur fort något rör sig och i vilken riktning. Farten är absolutbeloppet av hastigheten. Men eftersom termen hastighet används i dagligt tal och eftersom den uppgift som vi berör nedan använder termen genomsnittshastighet, så håller vi oss till det och ber fysikerna om ursäkt för vårt terminologimissbruk.