H THUNBERG, L FILIPSSON & M CRONHJORT

Gymnasiets mål och högskolans förväntningar

I den undersökning som här presenteras har gymnasiets mål avseende matematiken jämförts med högskolans förväntningar på nybörjarstudenternas matematikkunnande. Förutom ett tydligt innehållsmässigt gap framkommer också viktiga kulturskillnader när det gäller både matematiken och det matematiska arbetet.

Vid Kungliga Tekniska Högskolan, liksom vid många andra högskolor i landet, har vi under en längre tid iakttagit tilltagande svårigheter för de nyantagna studenterna att klara de obligatoriska kurserna i matematik. Från återkommande förkunskapstest för nyantagna som ges vid flera av landets högskolor rapporteras en kraftig försämring av resultaten sett över en längre period. Detta gäller t ex KTH (Brandell, 2005) och Umeå universitet (Bylund & Boo, 2003). Som lärare upplever vi hur spridningen på studenternas matematikkunskaper blir allt större, och hur en allt större grupp har så svaga kunskaper att de helt saknar förutsättningar för att tillgodogöra sig det första årets kurser. Trots minskat kursinnehåll upplevs kurserna som mer pressande nu än tidigare.

Vi rapporterar här om ett projekt, *Gymnasieskolans mål och högskolans förväntningar – en jämförande studie om matematikundervisning*, som har syftat till att närmare beskriva och analysera de ovannämnda problemen. Projektet har genomförts vid KTH Matematik av Hans Thunberg, Lars Filipsson och Mikael Cronhjort. Även studenter vid utbildningsprogrammet Civilingenjör & Lärare, som ges i samverkan mellan KTH och Lärarhögskolan, har medverkat i ett delprojekt inom ramen för sin utbildning. Vi vill passa på att framföra vårt tack till Gunilla Olofsson, Astrid Pettersson och Katarina Kjellström vid PRIM-gruppen på LHS för värdefulla diskussioner. Gunilla Olofsson var också tillsammans med Mikael Cronhjort handledare för de medverkande studenterna. Samtliga delprojekt och en sammanfattande rapport är publicerade på www.math.kth.se/gmhf.

Många av de problem vi identifierar har uppmärksammats i ett flertal tidigare rapporter och utredningar, t ex *Förkunskapsproblem i matematik* (Skolverket, 1998), *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket, 1999), *Matematik – Från gymnasieskolans NV-program till högskolan* (Björk & Brolin, 1998) samt i Matematikdelegationens slutbetänkande (SOU 2004:97). Det är påfallande hur samma problembeskrivningar har återkommit över åren utan att detta har resulterat i några nämnvärda förändringar.

Resultaten i vår undersökning har legat till grund för vårt engagemang i debatten om gymnasiets reformering, GY2007, och har också lett till vissa förändringar i de inledande matematikkurserna på KTH:s civilingenjörsprogram. Som framgår nedan anser vi att förändrade behörighetskrav till högskolan, utan åtföljande förändringar av kurs- och utbildningsplaner, också spelar en stor roll för de ökade problemen; denna aspekt har inte framhållits i tidigare rapporter.

Genomförda delprojekt

För att kartlägga vilket matematiskt kunnande som högskolan (KTH) förväntar sig hos de nyantagna studenterna, och för att jämföra detta med gymnasieskolans mål, har vi använt några olika metoder. Vi har inventerat materialet i KTH:s introduktionskurser (Thunberg & Filipsson, 2005a), som ett uttryck för KTH:s förväntningar, och vi har gjort enkätundersökningar bland lärare och studenter på KTH (Thunberg & Filipsson, 2005b) för att bedöma hur studenternas faktiska förkunskaper förhåller sig till KTH:s förväntningar. Vidare har vi genomfört studier av de fel som studenter gör i tentamenslösningar på introduktionskursen och på den första kursen i matematik på KTH (Cronhjort, 2005, Enström & Isaksson, 2005). En enkät till gymnasielärare gav oss deras bedömning av hur KTH:s förväntningar förhåller sig till de reella målen i gymnasiets matematikundervisning (Thunberg & Filipsson 2005c). Dessutom har vi jämfört kunskapssynen i gymnasiets nationella prov, som ett uttryck för de formella målen, med KTH:s förväntningar (Thunberg, 2005).

Resultat

Våra resultat pekar entydigt på att problemen med de så kallade bristande förkunskaperna i matematik till stor del är strukturella.

- Mycket av det som högskolan uppfattar som viktiga förkunskaper i matematik finns inte längre med i gymnasiets kurser. Andra saker finns visserligen med men behandlas med helt andra kunskapsmål än vad högskolan önskar och förväntar sig.
- Synen på vad matematiskt kunnande är skiljer sig markant åt mellan gymnasieskolan och högskolan, bl a beträffande räknefärdighet och formelkännedom.
- Högskolans behörighetskrav har sänkts i flera avseenden utan att kurserna har anpassats nämnvärt.

Stoffgapet

Vi identifierar en stor och relativt väldefinierad mängd stoff som högskolan förväntar sig att nyantagna studenter är väl förtrogna med men som inte längre kan sägas ingå i gymnasiets kurser, eller som där behandlas med helt andra kunskapskrav än vad högskolan väntar sig. På högskolan ges detta stoff i bästa fall en summarisk ”repetition”. Stoffområden som på detta sätt faller mellan stolarna är:

- Algebraisk färdighet, såsom bråkräkning, förenkling av rationella uttryck, räkning med rötter och potenser och kvadratkomplettering.
- Absolutbeloppsfunktionen.
- Olikheter.
- Avståndsformeln i planet, cirkelns ekvation.
- Skissa grafer, asymptoter, translation, skalning.
- Funktionsbegreppet, t ex begreppen sammansättning respektive invers funktion.
- Logaritmer, såväl vad gäller grundläggande egenskaper som förmåga att omforma uttryck med hjälp av logaritmlagarna.
- Trigonometriska formler och ekvationer, enhetscirkeln.

Kulturklyftan

Det finns en påtaglig skillnad i kunskapssyn mellan gymnasiet och högskolan, bl a när det gäller vikten av räknefärdighet och kunskap om formler och identiteter för elementära funktioner (utan hjälpmedel). Vi syftar här på skillnader som kommer till uttryck i t ex högskolans tester och på de nationella proven i gymnasiet. Vi har konstaterat skillnader i kunskapssyn på följande områden:

- *Räknefärdighet.* På högskolan är det självklart att räknefärdighet är en väsentlig del av det matematiska kunnandet, medan kraven på gymnasiet inom detta område (som de kommer till uttryck t ex i studenternas faktiska kunskaper och på de nationella proven) är generande lågt ställda.
- *Formelkunskap.* På högskolan anses kunskap om formler och identiteter vara en viktig del av matematikkunnandet. Vare sig det är fråga om kvadreringsregler eller deriveringsregler, logaritmlagar eller trigonometriska formler, så förväntas studenterna kunna dem, förstå dem och kunna härleda dem. Sådana krav existerar inte på gymnasiet.
- *Hjälpmedel.* På högskolan är miniräknare och formelsamlingar ofta inte tillåtna vid prov i de inledande kurserna. Tanken bakom detta är bland annat att utvecklingen av begreppsförståelse, räknefärdighet och formelkunskap måste utvecklas i samspel med varandra, och att många studenter handikappas i sin matematiska utveckling av bristande räknefärdighet. På gymnasiet är regeln istället den motsatta: miniräknare och formelsamlingar är nästan alltid tillåtna, och man möter en föreställning om att formler och beräkningar är hinder som står i vägen för den rätta förståelsen, hinder som kan undanröjas med tekniska hjälpmedel och formelsamlingar.
- *Beräkningskomplexitet.* På högskolan förekommer ofta uppgifter som kräver lösningar i flera steg med icketriviala beräkningar. Detta tycks ovanligt på gymnasiet.

Låt oss diskutera synen på formler lite till. I analyser av tentamenslösningar observerar vi på KTH hur studenter mitt i en lösning, synbarligen utan att reflektera, postulerar en falsk identitet. Vår tolkning är att studenterna på gymnasiet vid behov brukade söka efter lämpliga formler i sin formelsamling. De blir ställda utan formelsamlingen: Förväntas man nu komma ihåg alla formler? Vårt intryck är att studenterna i avsaknad av formelsamlingen söker i sitt eget minne, men helt saknar förmåga att skilja en sann formel från en falsk. Många verkar uppfatta en potentiell formel lika god som en annan, om det inte vore för att vissa är ”tillåtna” medan andra är ”förbjudna”.

Högskolans syn på saken är en annan: Formler ingår i en konsistent helhet, de kan härledas ur varandra och de kan testas, falsifieras eller bevisas. Att kunna de viktigaste formlerna utantill är ingen katekesläxa, utan ska vara en integrerad, självklar och i det närmaste ofrånkomlig del av ett större kunnande.

Exempel

Nedan visar vi, med hjälp av ett antal exempel från olika områden inom matematiken, hur de ovan beskrivna skillnaderna kan te sig.

Räkning med rationella tal

I kurserna på högskolan förutsätts det att studenten rutinmässigt kan hantera rationella tal. En typisk uppgift från KTHs introduktionskurs 2004 är

Beräkna $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$

I vår gymnasielärarenkät framkommer det att många lärare bedömer att en typisk elev med ett G i matematik efter Kurs D inte kan hantera dubbelbråk på egen hand. Detta tycks inte heller vara ett prioriterat mål: i de offentliggjorda årgångarna (2002 och 2005) av de nationella proven finns inga uppgifter som kräver förmåga att hantera dubbelbråk och endast någon enstaka uppgift som kräver ens den mest elementära färdigheten i att addera och multiplicera rationella tal. En typisk bråkuppgift från de nationella proven är istället

Placera talen 25, 102 och 0.1 i rutorna så att resultatet blir så stort som möjligt

$$\frac{\square - \square}{\square}$$

(Kurs A 2005)

Denna uppgift mäter taluppfattning och förståelse men kräver ingen beräkningsförmåga alls.

Algebraiska förenklingar

En typisk uppgift i KTHs introduktionsmaterial är

Förenkla $\frac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2+ab}$.

Gymnasielärarna är i stort sett eniga om att detta är en uppgift som den typiske G-eleven inte klarar att lösa på egen hand efter avslutade gymnasiestudier.

Uppgifter av motsvarande svårighetsgrad och komplexitet saknas på de två granskade årgångarna på nationella proven (möjligen med undantag för de sista beräkningarna i den sista uppgiften på Kurs D-provet från 2005). En typisk algebrauppgift på de nationella proven är

Använd konjugatregeln och förenkla

$\frac{a+3}{a^2-9}$.

(Kurs C 2005)

Vid provtillfället har eleven en formelsamling innehållande bl a konjugatregeln.

Logaritmer

En typisk KTH-uppgift är

Lös ekvationen

$\ln x+\ln(x+4)=\ln(2x+3)$.

Gymnasielärarnas bedömning är att den typiske G-eleven helt saknar förutsättningar för att lösa denna uppgift, i bästa fall kan han eller hon följa med i en presenterad lösning , men de flesta lärarna menar att vår typiske G-elev saknar förutsättningar även för detta. En elev med starkt VG bedöms kunna följa en given lösning, men saknar förmodligen förmåga att självständigt lösa uppgiften. Denna uppgiftstyp förekommer mycket riktigt inte heller alls på de nationella proven, där man istället hittar begreppsprövande uppgifter som

Vilket av följande tal är det bästa närmevärdet till lg 80?

A: 0,8 B: 0,9 C: 1,9 D: 2,9 E: 8,0 F: 800

(Kurs C 2002)

eller ett tillväxtproblem som leder till att man med räknarens hjälp skall bestämma t så att $95e^{-0,65t}=70$ (kurs C 2002).

Trigonometri

Ett motsägelsefullt exempel är trigonometri. Detta är ett område som ägnas mycket tid i gymnasiet, men trots det tycks många studenter helt oförberedda på vad som väntar dem i högskolan. Kanske kan det flitiga nyttjandet av miniräknare och formelsamling på gymnasiet vara förklaringen.

Sänkta behörighetskrav

De uttalade förkunskapskraven vid högskolan i form av behörighetskrav är lägre än de krav som undervisningen faktiskt ställer. Den minoritet som precis uppfyller kraven betyg G på Kurs D tycks få mycket stora problem med det första årets matematikstudier. Den särskilda behörigheten har sänkts flera gånger det senaste decenniet, antingen genom medvetna beslut eller som en konsekvens av andra beslut och skeenden, utan nämnvärd anpassning av högskolans inledande kurser. Vi tänker då på att:

- När gymnasieskolan gick från det relativa betygssystemet till dagens målrelaterade betyg ändrades den särskilda behörigheten i matematik för civilingenjörsprogram från betyg 3 till betyg G, där G ofta bedöms innefatta även betyg 2 i det relativa systemet.
- KTH såväl som en rad andra högskolor har sänkt behörighetskravet i matematik från Kurs E till Kurs D, en anpassning till vad som i dag är obligatoriskt på det naturvetenskapliga programmet. Detta innebär att introduktionen till komplexa tal, faktorsatsen, polynomdivision och polynomekvationer liksom till vissa integrationsmetoder och differentialekvationer har flyttat in i högskolans första

kurser, ofta inom samma poängutrymme som tidigare.

- En betydande betygsinflation på gymnasiet har förändrat innebörden av behörighetsvillkoren. Såväl vid KTH (Brandell 2004) som vid Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003) redovisas resultat som visar att betygsinflationen, mätt med högskolornas förkunskapsprov, är ett helt steg på ett halvt decennium: Studenter med betyg VG presterar idag resultat på samma nivå som studenter med betyg G för fem år sedan.

Slutsatser

Det finns ett stort glapp mellan gymnasiet och högskolan i ämnet matematik. En stor och relativt väldefinierad mängd stoff faller mellan stolarna, dvs är sådant som inte kan sägas ingå i gymnasiets kurser men som samtidigt av högskolan uppfattas som viktiga förkunskaper. Dessutom, och kanske ännu allvarligare, råder helt olika syn i gymnasiet och högskolan på vad som konstituerar matematiskt kunnande. Medan gymnasiet försöker undvika alltför komplicerade räkningar för att istället koncentrera sig på begreppsförståelse trycker högskolan hårt på att räknefärdighet är en *förutsättning* för förståelse. Medan gymnasiet ser miniräknare och formelsamlingar som ett sätt att öka koncentrationen på begreppsförståelse ser högskolan samma hjälpmedel som hinder som står i vägen för förståelsen: Om man inte tvingas räkna och utföra andra operationer för hand så förstår man dem inte, om man inte ser formler som sanningar som kan förstås, härledas och testas så får man aldrig något begrepp om vad de betyder.

Till sist konstaterar vi också att behörighetskraven vid högskolan har sänkts i flera avseenden under ett antal år utan att matematikkurserna har anpassats i tillräcklig grad. Detta gör att de studenter som precis uppfyller de formella behörighetskraven har mycket svårt att klara sig, och att spridningen i förkunskaper har ökat. Man skall inte glömma att det också finns en grupp studenter med goda förkunskaper och ett stort matematikintresse; för dessa är problemet det omvända, de inledande kurserna erbjuder inte tillräckligt med stimulans och utmaningar.

Några förslag

- Se över användandet av räknare i grundskola och gymnasium. Dessa hjälpmedel bör bara (och ska!) användas i situationer där forskning och dokumenterad och beprövad erfarenhet kan visa på gynnsamma effekter för inlärning och begreppsbildning. Idag används räknaren ofta slentrianmässigt på ett sätt som undergräver såväl färdighet som eftertanke.
- Ställ högre och tydligare krav i gymnasiets styrdokument och på nationella prov vad gäller räknefärdighet (bråkräkning, hantering av rötter och potenser, algebraiska förenklingar etc), speciellt för studenter på gymnasiets studieförberedande program.
- Utveckla synen på formler i gymnasiet: Bort ifrån formler som en samling regler som man ”får” eller ”inte får” använda och mot en syn på formler som något som går att begripa, testa, falsifiera eller bevisa. Formler som t ex kvadreringsreglerna eller trigonometriska ettan ska man kunna, vem är hjälpt av att leta efter dem i sin formelsamling?
- Utveckla dialog och möten mellan lärare på gymnasiet och på högskolan.
- Högskolan måste hålla sig à jour med utveckling på gymnasiet, och utforma sin inledande undervisning utifrån studenternas reella förkunskaper .
- Högskolan måste ta ansvar för en breddad rekrytering. Det kanske innebär att man får differentiera de nya studenterna efter studiebakgrund och förkunskaper, och att de som behöver ges möjligheter, ekonomiska såväl som organisatoriska, att ägna mer studietid åt de grundläggande matematikkurserna på högskolan.
- Vi efterlyser också forskning på vad det innebär att träning i grundläggande räknefärdighet skjuts högre upp i åldrarna.

Det är välbekant att språkinlärning sker ojämförligt bäst i unga år; det är inte helt otroligt att något liknande gäller för matematisk färdighet. Till bilden hör också att vardagen idag, tack vare tillgången på räknare, bjuder på betydligt mindre räkneträning jämfört med tidigare.

LITTERATUR

Björk, Lars-Eric och Brolin, Hans (1998). *Matematik – Från gymnasieskolans NV-program till högskolan.* Delrapport inom ramen för det s k ADM-projektet (Analys av Datorns konsekvenser för Matematikundervisningen) vid Institutionen för Lärarutbildning vid Uppsala Universitet.

Brandell, Lars (2005). *Matematikkunskaperna 2005 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH.* KTH.

Bylund, Per och Boo, Per-Anders (2003). Studenters förkunskaper. *Nämnaren nr 3,* 2003.

Cronhjort, Mikael (2005). *En studie av fel på tentamen 2004-08-27 i 5B1120 Introduktionskurs i matematik, 1 poäng.* KTH. www.math.kth.se/gmhf.

Enström, Emma och Isaksson, Sara (2005). *Feltyper på tentamenslösningar – granskning av lösningar på tentamen i matematik vid KTH HT-04.* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Högskoleverket (1999a). *Räcker kunskaperna i matematik?*

Högskoleverket (2005). *Nybörjarstudenter och matematik - matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar.* web2.hsv.se/publikationer/pressmeddelanden/2005/050818_ny.shtml

Skolverket (1998). *Förkunskapsproblem i matematik?*

SOU 2004:97 (2004). *Att lyfta matematiken - intresse, lärande och kompetens.* Matematikdelegationens betänkande.

Thunberg, Hans (2005). *Gymnasiets nationella prov och KTHs förkunskapskrav – en matematisk kulturklyfta?* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005a) *Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar.* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005b) *Lärares och studenters syn på KTHs introduktionskurs i matematik.* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005c). *Gymnasielärares syn på KTHs introduktionskurs i matematik.* KTH. www.math.kth.se/gmhf