

## ”Jag räknade med fingrarna”

Genom intervjuer med elever i åk 3 har författaren fått syn på olika sätt som elever använder sina fingrar på när de räknar. När fingrarna får representera ett antal finns goda möjligheter att utveckla god taluppfattning och effektiva räknestrategier, men då de används för dubbelräkning ger det ofta problem.

**F**ingrar används vid beräkningar, både av barn och vuxna. Studenter på lärarutbildningen och även verksamma lärare undrar om fingrarna är till hjälp eller om de inte alls bör användas av elever. Det är inte helt lätt att svara på den frågan. Forskare inom neuropsykologi och utbildningsvetenskap har olika syn på om fingerräkning hjälper elever att utveckla effektiva beräkningsstrategier eller inte. Dagmar Neuman påpekade redan 1989 att det inte handlar om *att* elever använder fingrarna, utan *hur* de använder dem. Hon hävdar att de elever som använder fingrarna för att representera ett antal har möjlighet att utveckla en god taluppfattning och effektiva strategier för aritmetiska beräkningar, medan de elever som använder fingrarna för att hålla ordning på antal och dubbelräknar får problem och hamnar i en återvändsgränd.

Många av de elever som jag har mött i åk 4 har automatiserade kunskaper, medan andra inte har upptäckt hur talen är kopplade till varandra och inte heller har utvecklat effektiva strategier för beräkningar inom talområdet 1–20. En iakttagelse är att elever som använt fingrarna när de räknat i detta låga talområde har fortsatt att använda fingrarna när vi gått vidare till högre talområden och multiplikation. Elevernas beroende av fingrarna har medfört att beräkningarna tagit lång tid och en del elever har upplevt matematikuppgifterna som svåra. Även Neuman konstaterade i sitt arbete som speciallärare att elever med matematiksvårigheter räknade på fingrarna långt upp i åldrarna.

*Hur* eleverna använder fingrarna är något jag aldrig tidigare funderat över, därför är jag tacksam för utmaningen från professor Ference Marton inför min masteruppsats att undersöka på vilka olika sätt elever i åk 3 använder fingrar i sina beräkningar i subtraktion. Eleverna i min studie kommer från två klasser med vardera 20 elever som genomfört Diamantdiagnoserna AG2 och AG3. Hälften av eleverna i de båda klasserna hade problem med att lösa uppgifterna korrekt på den tid som angetts för diagnoserna och de valdes därför ut för intervjuer som gjordes under vårterminen i åk 3.

För att titta närmare på elevers beräkningar med hjälp av fingrarna använde jag variationsteorin som analysverktyg. Beräkningsstrategierna fick följande kategorisering och i denna artikel redovisar jag insikter jag fått om beräkningsstrategier med fingrarna:

### Beräkningsstrategier med fingrar

Dubbelräkning uppåt

Dubbelräkning neråt

Fingermönster

### Övriga strategier utan fingrar

Uppräkning av tal

Dubblor

Tals del-del-helhet

Talfakta

## Dubbelräkning uppåt och neråt

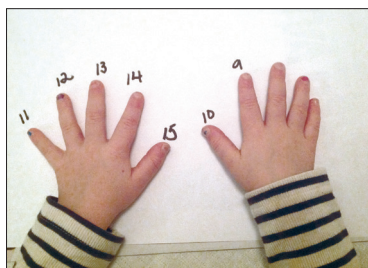
Vid dubbelräkning håller eleverna två talrader parallellt i huvudet, de säger var de är på talraden samtidigt som de räknar antalet steg. De elever som räknar ner ett steg i taget med hjälp av fingrarna riskerar att tappa bort sig. I en uppgift som 8–6 kan dubbelräkning se ut så här: sju<sup>1finger</sup>, sex<sup>2fingrar</sup>, fem<sup>3fingrar</sup>, fyra<sup>4fingrar</sup>, tre<sup>5fingrar</sup>, två<sup>6fingrar</sup>. Eleven räknar bakåt och får svårt att hålla reda på vilka ord som representerar den del som tas bort och vilka som representerar den del som återstår, ordsekvens och fingersekvens går åt olika håll. De sex fingrarna representerar det antal som tagits bort, inte det sist uttalade ordet. Andra elever kommer inte fram till rätt svar eftersom de markerar starttalet (8) som ett borttaget tal: åtta<sup>1finger</sup>, sju<sup>2fingrar</sup>, sex<sup>3fingrar</sup>, fem<sup>4fingrar</sup>, fyra<sup>5fingrar</sup>, tre<sup>6fingrar</sup>.

Jag ger några exempel från min studie där eleverna dubbelräknar:

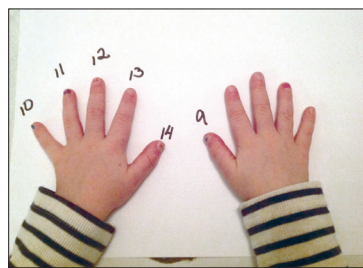
En lördag får du 15 godisbitar och äter genast upp 9.

Hur många har du kvar då?

Följande bilder visar två olika sätt som en osäker elev kan resonera på. Ivan som använde *dubbelräkning neråt* var osäker på om det var talet han landade på i beräkningen eller om det var det kvarvarande antalet fingrar som var svaret på uppgiften 15–9.



*Eleven räknar ned från starttalet 15 och får därför sju steg ner till 9 istället för sex steg.*



*Ivan startar beräkningen från 14, räknar ett steg i taget till 9 men ser de kvarvarande fyra fingrarna som svaret istället för de sex stegen från 15 till 9.*

En av eleverna, Cecilia, använde *dubbelräkning neråt* när hon löste uppgiften 15–9 med hjälp av fingrarna.

Hon beskriver hur varje finger får representera det "tal" som tas bort. Cecilia använder en hand, håller reda på att när handen är knuten har fem tal (från 15 till och med 11) tagits bort och att det är ett tal till som ska tas bort, så hon "tar bort 0:an" (egentligen talet 10). För att vara säker säger hon att hon "har 9" och börjar om igen (nu håller hon fram nio fingrar) och räknar tre steg (9, 8, 7) ner till 7 (då har hon tagit bort nio tal), nöjer sig och är säker på att svaret är 6. Cecilia behandlar talen som enstaka enheter som räknas ett i taget med hjälp av fingrarna.

Även om Cecilia kommer rätt så visar hennes resonemang tydligt att hon är osäker och använder en onödigt krävande strategi som, förutom att den tar mycket lång tid för henne, dessutom blir än besvärligare i högre talområden.

Uppgift: Beräkna  $82-7$ . ( $82-7$  gavs som ett naket tal på en post-it-lapp.)

Nora använder dubbelräkning neråt i uppgiften  $82-7$  och försöker först hålla två talrader i huvudet samtidigt utan att använda fingrarna. Det blir för komplicerat, så hon tar fingrarna till hjälp. Nora har händerna knutna och håller nu reda på antalet steg genom att vika ut tummen på höger hand och ett finger i taget när hon säger "1, 2, ..., 3, 4, vänta nu". Hon blir osäker och börjar om med tummen och ett finger i taget, "vänta 1, 2, 3, 4, 5". När hon har vecklat ut hela höger hand, viker hon upp tummen på vänster hand, sedan pekfingret och fortsätter "6, 7". När hon vikt ut sju fingrar framgår det att hon är osäker på var på talraden hon befinner sig "5, jag menar 72, eller ... vänta, 71 tror jag". Det märks att Nora försöker hålla de båda raderna i huvudet, dels de sju stegen från 82 och dels var på talraden hon befinner sig när hon säger "jag tänker ... först tar jag 82 och så tänker jag, då måste jag veta hur länge jag ska räkna, det är då som jag räknar på fingrarna". När hon får frågan om hur hon gör när hon säger "ett" svarar Nora "då är jag på 81, ..., sen på 80, 79, 78, 77, ja och sen 76 eller jag vet inte".

Eleven exemplen visar *dubbelräkning neråt* med hjälp av fingrarna på olika sätt, men gemensamt är att de räknar ett finger i taget och behandlar tal som enkla enheter. Elever som dubbelräknar, såväl uppåt som neråt, använder tidskrävande ineffektiva strategier och de använder inte talens del-del-helhetsrelation. Eleverna verkar inte se talens delar. I exempelvis  $82-7$  delar de inte upp  $7=2+5$  för att underlätta uträkningen och i  $15-9$  utnyttjar de inte närheten till 10. Detta behöver vi lärare uppmärksamma mer redan i skolstarten för att förhindra problem med beräkningar längre fram.

En annan dag har du samlat 32 stenar och din kompis 27.  
Hur många fler har du då?

Anna använde *dubbelräkning uppåt* med hjälp av fingrarna ett steg i taget i uppgiften  $32-27$ . Hon kommenterar att "då har kompisens mindre än jag och då kan man gå uppåt". Anna verkar osäker när hon räknar på talraden:

Hon funderar några sekunder på uppgiften, håller båda händerna på bordet och rör knappt synbart på fingrarna. Det framgår att svaret hon ger är 4, men på frågan hur hon vet det, förklarar Anna sin beräkning genom att vika ut ett finger i taget på vänster hand och berättar att hon "räknar uppåt 28, 29, 30, 32, alltså skiljer det 4". Anna inser inte att svaret är fel, då hon missar ett tal på talraden.

## Fingermönster

Begreppet *fingermönster* (här synonymt med *fingertal*) används för att beskriva hur en elev använder fingrarna för att representera antal och synliggöra relationer mellan tal, utan att räkna ett finger i taget. Resultatet av en studie med elever 6–12 år visar att de elever som har god taluppfattning använder fingrarna *som en bild av antal*, medan elever som presterar sämre i aritmetiska beräkningar använder svårare beräkningsmetoder med och utan fingrar. Neuman använder begreppet *fingertal* när eleverna använder fingrarna för att se antal utan att behöva räkna. Elever i hennes studie som använde *fingertal* utvecklade sitt abstrakta tänkande genom att övergå till att "tänka med sina

händer” och använde fingrarna som en representation av hela antalet uppdelat i två delar, där talet 5 har en viktig roll och kan representeras av en knuten hand. En elev i min studie använde fingermönster i beräkning av uppgiften  $13 = 7 + \dots$

Du och en kompis har samlat 13 snäckor tillsammans. Du har hittat sju, hur många har din kompis hittat då?

David håller fram båda händerna på bordet, tar med vänster hand om tummen och pekfingeret på höger hand, sträcker ut de kvarvarande tre fingrarna på högerhanden, säger 7 och svarar sedan 6. På frågan om hur han gjorde, lägger han båda händerna på bordet och svarar: ”Jag gjorde så här, i stället för att använda tre fingrar (pekar på de tre fingrarna på högerhanden) för att jag har inte 13 fingrar så jag räknar 10 först (lägger båda händerna på bordet) först så tar jag bort 7 (viker in hela vänster hand plus tummen och pekfinger på höger hand) och då har jag 3 kvar men det blev ju 13 så då tar jag fram 3 till”(viker ut de två invikta fingrar på höger hand och tummen på vänster hand) och de där (pekar på de fyra invikta fingrarna på högerhanden) blev över när jag räknade”.

Fingermönster fungerade för denne elev som snabbt räknade ut uppgiften och fick rätt svar.

## Vilka beräkningsstrategier använder eleverna?

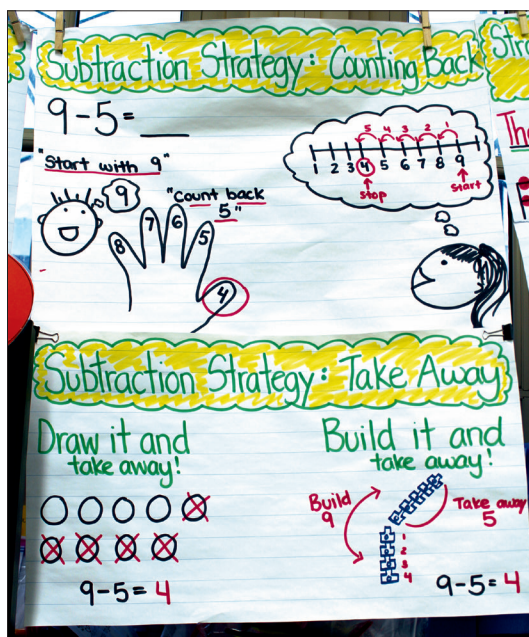
Mer än hälften, 60%, av de intervjuade eleverna använder dubbelräkning uppåt och dubbelräkning neråt i sina beräkningar. Fyra av de arton intervjuade eleverna använder fingrarna i samtliga beräkningar. Resultatet i studien visar att många av eleverna inte har utvecklat automatiserade kunskaper i subtraktion inom talområdet 1–20. Ett intressant resultat är att fjorton av de intervjuade eleverna, 77%, antingen behandlar tal som enstaka enheter i stället för grupperade enheter när de dubbelräknar med hjälp av ett finger i taget eller använder strategin uppräknning av tal, något som gör beräkningarna onödigt komplicerade. Eleverna i studien visar att de har särskilt stora svårigheter i subtraktion när de använder dubbelräkning neråt med hjälp av fingrarna. Dubbelräkning med ett finger i taget är en strategi som ger eleverna problem eftersom antalet fingrar inte räcker till när talen överstiger tio och inte fungerar i ett högre talområde.

Fingermönster använder tre av eleverna och visar att fingrarna är ett stöd för att uppfatta antal. Dessa elever löser uppgifterna samtidigt som fingrarna visar en bild av talet utan att de räknar antalet fingrar. De använder subitisering och erfar tals del-del-helhetsrelation. Vissa elever som dubbelräknar använder fingrarna för att avläsa svaret i beräkningen och de tittar inte på fingrarna utan visar att de uppfattar antalet bara genom att röra fingrarna.

Slutsatsen är att elever, som använder dubbelräkning uppåt och neråt genom att hålla två talrader samtidigt i huvudet, utför komplicerade uträkningar som belastar arbetsminnet, något som gör aritmetiska beräkningar onödigt svåra och kan resultera i att elever ger upp. Yngre barns beräkningar med hjälp av fingermönster kan vara en hjälp för fortsatta aritmetiska beräkningar, medan dubbelräkning uppåt och neråt med hjälp av ett finger i taget kan ha motsatt effekt. Neuman menar att när dubbelräkning används som huvudmetod i addition och subtraktion blockerar det möjligheterna att utveckla huvud- och överslagsräkning och därmed alla förutsättningar för fortsatt utveckling av det aritmetiska tänkandet.

Det vi lärare behöver diskutera är vad det är i den tidiga aritmetikundervisningen som påverkar eleverna att utveckla icke hållbara räknestrategier. Vi behöver alltså uppmärksamma elevers strategier tidigt och hjälpa dem med sådana som är effektiva.

Vid ett besök på en skola i New York noterades en affisch om subtraktionsstrategier i ett klassrum med elever i åk 1. En av de föreslagna strategierna i subtraktion uppmanar till dubbelräkning neråt med hjälp av fingrarna. En fråga jag då ställer mig är om dubbelräkning är en utlärdd strategi eller en strategi eleverna själva kommer på? Exempelvis var det ingen av nybörjareleverna i Neumans studie som använde dubbelräkning neråt.



Ytterligare forskning behövs för att ta reda på hur vanlig dubbelräkning med hjälp av fingrarna är i grundskolan. Det vore intressant att studera hur eleverna lär sig använda dubbelräkning med fingrarna och om det är en del av undervisningen i de lägre åldrarna. Om det med tidig undervisning i förskolan går att förhindra dubbelräkning med hjälp av fingrar, är också en fråga för vidare forskning.

Det kunde även vara intressant att titta på de elever som klarar testerna felfritt. Använder de sig bara av talfakta eller använder även de fingrar som stöd på något sätt ibland?

## LITTERATUR

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(2).

För övriga referenser finns artikelförfattarens masteruppsats *Jag räknade med fingrarna – en studie om elevers beräkningsstrategier i subtraktion i årskurs 3* tillgänglig på: [gupea.ub.gu.se/handle/2077/57505](http://gupea.ub.gu.se/handle/2077/57505).