Helena Eriksson

Taluppfattning i heterogena elevgrupper

I denna artikel presenteras en uppgiftsdesign som syftar till att utveckla elevers uppfattning av naturliga och rationella tal. Uppgifterna har använts i grupper med stora inbördes skillnader i elevernas såväl matematisk som språkliga utveckling. Uppgifterna visade sig stimulera matematiska diskussioner i de heterogena elevgrupperna.

Den skolan som jag arbetar vid framhåller inkludering som ledord. Skolan kallas av personal och elever för interkulturell och med det menar vi att vi berikar varandra och att vi tillsammans skapar något nytt. Med inkludering menar vi att vi lär tillsammans och att våra olikheter är en tillgång. Eleverna i våra grupper visar stora skillnader i sina matematiska förmågor och befinner sig på olika utvecklingsnivå vad gäller det svenska språket. Att utveckla matematiska förmågor utifrån traditionellt tyst individuellt arbete har inte lyckats särskilt väl. Gemensamma diskussioner och gemensam problemlösning har visat sig vara en mer framkomlig väg. Vi ska här ta en titt på en uppgiftsdesign som vi utprövat och använt under lektioner med elever i årskurs 1–4.

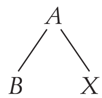
Grundtanken till uppgifterna har hämtats från ett ryskt matematikdidaktiskt program utvecklat av Daniil Elkonin och Vasily Davydov. Jag ska här försöka beskriva uppgifterna och grundtanken för designen av dem. Uppgifterna är diskussionsuppgifter som gestaltas i helklass där läraren är diskussionsledare. Syftet med diskussionerna är inte att läraren ska serva med instruktioner eller tillföra lösningar som eleverna sedan kan härma i sitt eget arbete. Syftet är i stället att leda arbetet i klassrummet genom att stimulera gemensamma diskussioner där eleverna ges möjlighet att reflektera över och diskutera det matematiska innehåll som synliggörs. Diskussionerna är möjliga genom att eleverna erbjuds olika matematikspecifika redskap som tillsammans med de problem som uppgifterna innehåller synliggör ett matematiskt innehåll. Vi har sett att de redskap som används i uppgifterna ger eleverna möjlighet att diskutera både sina egna och sina klasskamraters lösningsförslag.

De uppgifter vi har arbetat med handlar om taluppfattning av hela och rationella tal. Det matematiska innehållet varieras och görs därmed tydligt och synligt för eleverna. Utöver arbetet med dessa uppgifter arbetar vi som vanligt med att ramsräkna och operera med de hela talen för att därifrån gå till att arbeta med delar av helheter. Men hur kan man designa en gemensam praktik för de olika talområdena? Tanken är att eleverna ska arbeta med uppgifter där olika kvantiteter såsom längder, areor och volymer jämförs. Att jämföra kvantiteter är ett av talens ursprungliga användningsområden och synliggör behovet av både hela och rationella tal. Kvantiteterna representeras med hjälp av algebraiska symboler och linjer.

Vi jämför längder

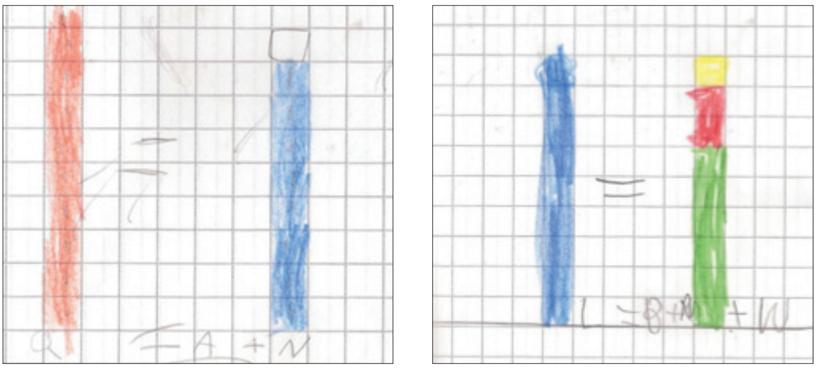
I de inledande uppgifterna som genomfördes i de första skolåren jämförde vi längder, se exemplet i figuren nedan. Helheten A jämförs med delarna X och B. A kan därför uttryckas med B och X.

Jämförelsen $A = B + X$



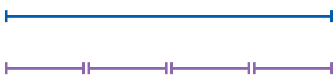
Modellen $A = B + X$

Här jämförs de olika längderna med modellen $A = B + X$ där B kan uttryckas som $B = A - X$ och X kan uttryckas som $X = A - B$. För att arbeta med dessa jämförelser fick eleverna i uppgift att lösa problemet ”Hur kan vi göra lika?”. Cuisenairestavar, ett material som Gudrun Malmer introducerade i svensk matematikundervisning under 1900-talets sista årtionden, användes med stor framgång i detta arbete. Nedan ser vi elevarbeten från årskurs 1 där de använt modellen ovan för att jämföra olika längder och för att konstruera likheter.



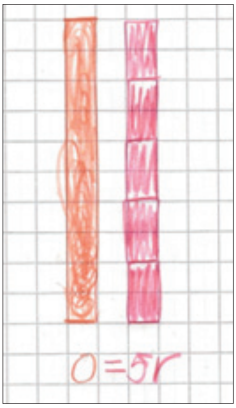
Två elevarbeten: $Q = A + N$ *och* $L = B + R + W$

När det är dags att arbeta med utvidgad taluppfattning är tanken att A uttrycks med endast en annan mätenhet. A kan exempelvis jämföras med en mätenhet som är U lång.



Jämförelsen $A = x \cdot U$

Här består A av ett antal U. Sambandet mellan A och U kan anges med uttrycket $A = x \cdot U$, där x är antalet mätenheter av U som behövs för att mäta A. Jämförelsen där en och samma stav används som mätenhet visar på ett multiplikativt förhållande mellan A och U.



Elevarbete: $0 = 5r$

För de yngsta eleverna består antalet U alltid av ett heltal. Även här passar Cuisenairestavarna utmärkt. Vilka jämförelser kan eleverna genomföra som följer modellen $A = x \cdot U$? I bilden till vänster visas ett elevarbete från årskurs 2. Här är enheten r, vilket innebär att avstånden mellan markeringarna på tallinjen är $r \cdot 5$ avstånd, det vill säga $5r$ utgör O.

Föremål blir mätenheter

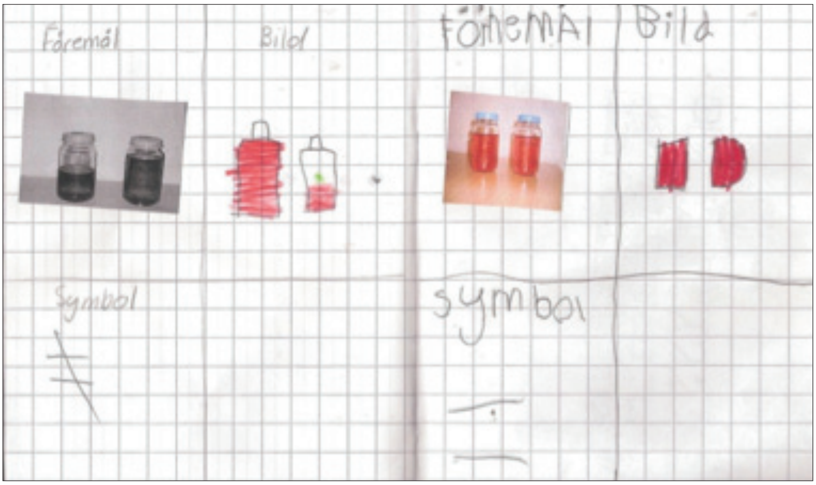
Arbetet i våra klasser fortsatte med jämförelser av längder med annat material än Cuisenairestavar. I ett första steg använde eleverna pennan för att mäta bänklockets längd och dörrens bredd. Eleverna fick sedan reflektera över varför det blev olika svar i klassen. Eleverna diskuterade sig fram till att pennorna var olika långa. Läraren fick här vara noga med frågorna: ”Vad var det du mätte? Vilken mätenhet använde du? Hur gör man när man mäter?” Målet är att eleverna reflekterar över att man är noga med att måttet ligger kant i kant och att man måste börja på samma ställe om man använder en del av ett ting som mätenhet. När man mäter volym måste man vara noga med att fylla mätenheten lika varje gång. Därefter provade eleverna vad man kan använda som mått. Kan man använda ett popcorn eller ett suddgummi? Eleverna diskuterade frågor som ”Kan man byta mätenhet under tiden som man jämför saker?”. Eleverna resonerade kring vilken bok som är bredast; en bok som är tio popcorn eller en bok som är elva suddgummi? Därefter blev eleverna ombedda att jämföra bredden på bänken med höjden av dörren. Hur skulle det kunna gå till? Eleverna avgjorde att man måste använda någon form av mätredskap. En pappersremsa som representation av bänken fick utgöra mätenheten. I en tvåa representerade eleverna istället de objekt som de skulle jämföra, höjden av dörren och längden av diskbänken, med pappersremsor för att ta dessa representationer till sin arbetsplats. En elev uttryckte:

> *Nu kan vi jämföra hur många BLS (symbolen för bänklockssida) som får plats i D (dörren).*

Några elever kom på att de kunde mäta med linjaler och några att de kunde mäta med antalet steg. Ingående diskussioner uppstod om varför svaren varierade. Eleverna kom fram till att de grupper som mätt med linjalerna eller antalet steg inte kunde ange D med enheten BLS. De var tvungna att använda någon annan enhet. När eleverna använde linjalerna mätte någon grupp antalet linjaler och en annan grupp använde enheten cm som fanns på linjalen. Vad innebar det för värdet på X i modellen $D = X \cdot BLS$? Nya samtal startade om vad som var mätenhet och vad som avbildats. Läraren fortsatte diskussionen med ”Hur kan vi mäta 2 D? Måste vi mäta dessa två dörrar om vi vet vad 1 D är? Om vi ska mäta 10 D, eller om vi ska mäta 100 D?”

För att generalisera behovet av mätenheter rekommenderas att eleverna även möter volym som kvantitet. De första övningarna med jämförelse av volymer bestod i våra klasser av att eleverna diskuterade hur man kan jämföra och göra volymen i olika burkar lika. Här diskuterade vi ”Vad är lika? Vad är olika? Hur kan man göra lika?”. Överst på nästa sida syns ett elevarbete från årskurs 1.

I diskussionerna använde vi ord och begrepp för jämförelser av volymer, exempelvis mer, mindre, mycket, lika, olika, lite, nästan fullt, nästan tomt, halvfullt, fullt ända upp osv. Elever med andra modersmål än svenska hjälpte varandra att beskriva och finna innebörd i dessa ord.



Elevarbete: Vad är olika? Vad är lika?

Vi hade inte något språkstöd närvarande under lektionerna, utan det var de matematikspecifika redskapen: volymjämförelserna, symbolerna, orden och begreppen som utgjorde stöd i diskussionerna.

Burkar, volymer och resonemang

Arbetet fortsatte med en uppgift där en stor burk fylldes med vatten med hjälp av en mindre burk. Den stora burken benämndes med A och den lilla burken med b. Burken A kunde fyllas med vattnet från fyra burkar b. Detta formulerades $A = 4b$ eller med ord ”det går fyra b på en A”, vilket också kan skrivas om som $A/b = 4$. Samma burk A fylldes därefter från en ännu mindre burk c. Burken A kunde då fyllas med åtta burkar c. Detta kan formuleras $A = 8c$ eller $A/c = 8$. Eleverna fick därefter diskutera två frågeställningar kring dessa jämförelser:

1. Varför ger A/c ett större tal än A/b. (Mätenheten är mindre, därför går det fler sådana enheter i burken A.)
2. Om nu talet A/c var dubbelt så stort som A/b, hur stor var då b i jämförelse med c? Eleverna bör komma fram till resultatet dubbelt så stor.

Ett nytt scenario presenterades för eleverna. En ännu mindre burk d användes för att fylla på A. Den burken var en fjärdedel så stor som den första burken b. Är det nödvändigt att mäta för att se hur burkar d som nu behövs för att fylla A? Eleverna kommer fram till att nej, det är det inte. Hur många sådana burkar d behövs då för att fylla A? I en gemensam diskussion kom eleverna fram till att det måste vara 16 burkar. Hur kan vi alltså beskriva A? Alla olika sätt vi kan beskriva A på summeras till: $A = 4b = 8c = 16d$.

Från hela till rationella tal

Arbetet att utveckla taluppfattningen fortsatte därefter i ett andra steg. I de jämförelser vi hittills arbetat med gick måttet alltid ett jämnt antal gånger i objektet som skulle mätas, dvs A/u var alltid ett heltal. I det fortsatta arbetet utvecklas de kvantiteter som ska jämföras på ett sådant sätt att de inte går jämnt upp i varandra. Naturligtvis inträffar det att jämförelser inte går jämnt upp, men det får inte någon större uppmärksamhet förrän det är dags att diskutera rationella tal. Eleverna försattes i situationer där de utmanades att ange ett mätresultat för jämförelser där en längd, volym, vikt eller area ska anges exakt med en och endast en mätenhet. Ett sätt att ta fram uppgifter tillsammans med eleverna är att använda sig av Cuisenairestavar. Eleverna konstruerar inledningsvis egna jämförelser, och förr eller senare kommer de fram till jämförelser som de inte kan ange ett mätresultat för. Våra elever ville först undvika dessa jämförelser genom att justera uppgiften. Men de fick inte ändra mätenhet för att göra det möjligt att ange mätresultatet. Elevernas frågor och reflektioner om de egna jämförelserna blev utgångspunkt för det fortsatta arbetet: ”Det här går inte. Det är något ni måste lära oss. Det är något vi inte kan ännu.”

En viktig process blev att tillsammans med eleverna identifiera problemet istället för att undvika det. Vad skiljer detta problem från de tidigare? För att ange ett mätresultat för jämförelserna behövde vi ta hjälp av flera olika matematikspecifika redskap. Bland annat ’en liten bit till’ av den sista mätenheten. Hur kan vi representera denna ’lilla bit till’ för att få ett exakt mätresultat? Hur vi arbetade med att utveckla modeller för att ange rationella tal ryms inte i denna beskrivning utan kommer i en uppföljande artikel.

Sammanfattningsvis såg vi att de uppgifter vi designade utifrån Elkonin och Davydovs matematikdidaktiska program erbjöd eleverna möjligheter att utveckla taluppfattning i de diskussioner som gestaltades i klassrummet. Det blev möjligt att urskilja aspekter av naturliga tal i steg ett och att urskilja aspekter av rationella tal i steg två. Diskussionerna stöddes av jämförelser mellan olika kvantiteter, de matematiska modellerna, de algebraiska symbolerna, tallinjer samt ämnesspecifika ord och begrepp. Uppgifterna gjorde det möjligt att diskutera att

- en kvantitet kan beskrivas på olika sätt
- jämförelser kan redovisas med symboler i form av bokstäver eller siffror
- olika enheter för en och samma kvantitet ger olika storheter
- en kvantitet kan anges på en tallinje.

I det fortsatta arbetet när vi arbetade med rationella tal var det även möjligt att diskutera att

- tre enheter kan behövas för att diskutera ett tal: ett objekt som ska mätas, mätenheten som objektet mäts med samt den mindre enheten som mätenheten delas i
- rationella tal och tal i bråkform kan vara tal på en tallinje
- rationella tal finns mellan två hela tal
- rationella tal innehåller både multiplikativa och additiva tankestrukturer.

De matematiska diskussionerna var möjliga i grupper med elever som visat olika förutsättningar att knyta an till tidigare kunskaper i matematik och där eleverna har olika förutsättningar att använda det gemensamma undervisningsspråket.

För den som vill fördjupa sig finns Helena Erikssons licentiatuppsats fritt tillgänglig som pdf.
Länk till uppsatsen finner du på Nämnaren på nätet.