

# Möte med bokstäver

En Learning Study är en cyklisk process där en grupp lärare utvecklar ett undervisningsinnehåll med stöd av vissa teorier om lärande och variation. Här beskrivs en Learning Study inom området algebra.

Många elever stöter på problem när bokstäver introduceras i matematik. Vad bokstäverna i en ekvation betyder och står för kan tolkas på olika sätt av olika elever. En del uppfattar att bokstäverna har ett specifikt numeriskt värde. Andra tolkar bokstäverna som en förkortning för ett specifikt objekt eller som ett objekt i sig självt. En bokstav i ett algebraiskt uttryck kan av vissa uppfattas som ett speciellt men okänt tal, en bokstav som kan anta flera värden eller som en räcka av tal men med ospecificerade värden. Vissa elever kopplar bokstäverna till alfabetet och tror tex att om bokstäverna  $K$  och  $C$  finns i en ekvation, måste värdet av  $K$  vara större än värdet av  $C$  därför att denna kommer senare i alfabetet. Elever inser inte alltid att värdet av en obekant inte behöver vara knutet till en speciell bokstav, utan de kan tro att om man byter ut en bokstav mot en annan så ändrades också värdet. Det finns intressant forskning kring dessa frågor som beskrivs i (Booth, 1984; Kieran, 2004; Knuth mfl, 2005). Där refereras bla studier av Küchemann och Wagner.

Det är lätt hänt att man som lärare inte är medveten om att elever kan tolka innebörden i bokstäverna i en ekvation på olika sätt och på ett annat sätt än läraren själv gör. Om vi vill att eleverna skall utveckla en grundläggande förståelse för algebra måste

enligt Mason (1996) detta uppmärksammas. I denna artikel redovisar vi hur en grupp lärare systematiskt arbetade med att undersöka och utveckla sin undervisning i avsikt att förbättra elevernas förståelse av innebörden av bokstavssymboler i den inledande algebraundervisningen.

## Learning Study

Den aktuella studien är en kombination av utvecklingsarbete och forskning och genomfördes som en så kallad *Learning Study*. En Learning Study innebär att en grupp lärare arbetar i en cyklisk process med att pröva och utveckla sin undervisning. I denna process är elevernas lärande i fokus. Arbetet tar utgångspunkt i det som är problematiskt för eleverna att lära och startar därför med att deras förkunskaper kartläggs. Detta sker via ett test eller en intervju. Resultatet av detta ligger till grund för planeringen av den första lektionen i cykeln. Denna (liksom följande lektioner) videofilmas.

Någon dag efter lektionen testas/intervjuas eleverna igen och lärarna träffas och tittar på den inspelade lektionen. Testresultatet utgör de "glasögon" varmed lärargruppen studerar lektionen. De försöker alltså, i ljuset av vad som hände på

lektionen, att förstå varför eleverna eventuellt inte lärde sig eller varför de svarade på ett visst sätt på uppgifterna på eftertestet. Det är emellertid inte vad som helst i lektionen som de tar fasta på. Lärarna har ett speciellt fokus för sin uppmärksamhet, nämligen hur det matematiska innehållet behandlas. När de tror att de har kommit underfund med varför eleverna inte lärde sig, ändrar de sin planering inför nästa cykel. En ny lärare tar över och undervisar sina (alltså nya!) elever. Dessa testas också före och efter lektionen och, precis som i den första cykeln, studerar lärarna sin undervisning utifrån vad eleverna hade möjlighet att lära under lektionen. Innan den tredje läraren genomför lektionen med sina elever görs ytterligare förändringar om man tycker att så behövs. Mer om den teoretiska bakgrunden för Learning Study finns i (Marton & Tsui, 2004; Runesson, 2004; Holmqvist, 2006).

Detta sätt att arbeta med observation och revidering av undervisningen liknar det utvecklingsarbete som är vanligt bland japanska lärare i så kallade Lesson Studies (Lewis, 2002; Stigler & Hiebert, 1999; Yoshida, 1999). Det som skiljer en Learning Study från en Lesson Study är bl.a. att lärarna i en Learning Study inte primärt fokuserar organisation eller metoder. Istället är det sättet att behandla undervisningsinnehållet i relation till elevernas lärande som man försöker att utveckla.

## En teoretiskt grundad modell

Lärarna i en Learning Study har också vissa vägledande teoretiska principer till sitt förfogande som handlar om hur vi lär oss att förstå och uppfatta vår omvärld. Om två individer uppfattar ett fenomen, ett begrepp eller en situation på olika sätt beror det på att de urskiljer olika aspekter av fenomenet, begreppet eller situationen (Marton & Booth, 1997). För att uppfatta eller förstå något på ett speciellt sätt måste vi urskilja alla de nödvändiga aspekterna. Att försöka att finna dessa nödvändiga aspekter är ett av målen för en Learning Study. Lärarna i vår studie frågade sig därför: Vad är nödvändigt att få grepp om för att förstå vad bokstavs-symbolerna i en ekvation betyder? Vilka är

de kritiska aspekterna? Hade eleverna möjlighet att få syn på dessa under lektionen? Vad måste vi ändra så att de får det?

Teorin säger också att man bara kan få syn på ett drag eller en egenskap hos något om det ses i ljuset av en variation. Om man exempelvis lägger märke till att en person är lång, beror det på att man har en erfarenhet av individer av olika längd. Skulle alla människor vara lika långa, skulle kroppslängden inte vara något man uppmärksammade över huvud taget. En lärare som vill få sina elever att urskilja en aspekt hos det hon undervisar om, kan göra detta genom att skapa en variation av aspekten i fråga. I en Learning Study försöker lärarna medvetet att skapa olika mönster av variation och invarians kring det som de anser vara kritiska aspekter för lärandet.

Studien genomfördes i tre åldersblandade klasser i skolår 4 och 5. Både lärare och elever deltog frivilligt och vi hade inhämtat föräldrarnas tillstånd att filma lektionerna. De inspelade lektionerna analyserades av lärargruppen för att förbättra och utveckla undervisningen, och av oss som forskare för att mera i detalj kartlägga relationen mellan undervisningen och elevernas lärande.

## De tre lektionerna

De tre lektionerna planerades gemensamt av lärargruppen. De blev under cykeln ganska olika till sin karaktär. Detta berodde på att de medvetet och systematiskt reviderades utifrån resultat på test och efter att lärarna hade studerat de videofilmade lektionerna.

### *Lektion 1*

Fokus under den första lektionen var riktat på hur ett och samma problem kan tecknas med olika ekvationsuttryck. Den uppgift som gavs under lektionen gick ut på att antingen hitta ett ekvationsuttryck till ett givet problem eller ett problem till en given ekvation. De fem exemplen handlade om enklare additions/subtraktionsproblem, som tex "en chokladkaka kostar 5 kr mer än en kola". Följande uttryck för detta exempel kom fram och skrevs på tavlan:

$$\begin{aligned}
C - K &= 5 \\
C - 5 &= K \\
K + 5 &= C \\
C &= K + 5 \\
K &= C - 5 \\
C - 5 &= K \\
5 + K &= C
\end{aligned}$$

Tittar man på den variation som finns här ser man att del/del/helhetsrelationen varieras så att symbolernas position i ekvationen ändras ( $K = C - 5$ ,  $C - 5 = K$  respektive  $5 + K = C$ ,  $C = 5 + K$ ) och därmed också operationen/räknesättet ( $C - K = 5$ ,  $K + 5 = C$ ) samt likhetstecknets placering. Om man utgår från det teoretiska antagandet, att det som varierar är sådant som eleverna har möjlighet att lägga märke till, betyder det att eleverna hade möjlighet att lära sig att del/del/helhetsrelationen kan skrivas som en ekvation på olika sätt och att symbolernas position ( $K$ ,  $C$  och  $=$ ) då ändras liksom ibland också operationen.

Men, om man tittar närmare på de bokstäver som användes för att representera variablerna, ser man att dessa var begynnelsebokstäverna för priset på de objekt som de symboliserade;  $C$  betecknade "priset på chokladkakan" och  $K$  "priset på kolan". Det betyder att inga andra bokstäver eller symboler användes (tex  $X$  eller  $B$ ). Så var det i alla fem exemplen under lektionen.

Hur innehållet behandlades, dvs i detta fall vilka symboler som valdes för att representera de båda variablerna, avspeglades i resultatet på eftertestet. I en uppgift uppmanades eleverna att skriva två olika ekvationsuttryck för samma exempel. 87% av eleverna i klass 1 (dvs lektion 1) gjorde detta genom att ändra ordningen på symbolerna (se tabell 1). Vad vi fann anmärkningsvärt var emellertid att alla eleverna använde bokstavssymboler som var de samma som begynnelsebokstäverna i de variabler som exemplet handlade om (tex att de använde  $A$  för priset för äpple och  $G$  för priset för gurka).

## Lektion 2

Genom att studera testresultatet och lektionsinspelningen insåg lärarna att eleverna under lektion 1 hade missat något i sitt

lärande. De kom underfund med att eleverna inte haft möjlighet att lära sig att valet av symboler är godtyckligt eftersom detta inte hade kommit fram under lektionen.

Uppläggningsen av lektion 2 blev därför delvis annorlunda. Under lektion 2 förekom samma variation som under lektion 1, dvs del/del/helhet och därmed symbolernas placering samt operationen varierades. Men, förutom detta, användes även andra bokstavssymboler än begynnelsebokstäverna i variablerna ( $C$  för priset på chokladen osv) tex  $X$  och  $Y$ . Dessutom presenterade läraren en "felaktig" ekvation. Tex skrev han  $C + 5 = K$  för exemplet "en chokladkaka kostar 5 kr mer än en kola". Detta "motexempel" användes för att del/del/helhetsrelationen skulle framstå tydligare. Nedan framgår vilka olika ekvationer som förekom under lektion 2.

$$\begin{aligned}
K + 5 &= C \\
C - 5 &= K \\
C - K &= 5 \\
Y - 5 &= X \\
C + 5 &= T
\end{aligned}$$

Även i denna klass var det en majoritet av eleverna som på eftertestet enbart varierade positionen på symbolerna, se tabell 1. Cirka en femtedel (19%) av eleverna löste uppgiften att skriva en "annan ekvation" genom att behålla positionen på variablerna och istället byta symboler, tex  $A + 6 = G$  och  $X + 6 = Y$ . Det vara alltså fler elever som efter den andra lektionen i cykeln valde att byta ut bokstavssymbolerna jämfört med klass 1. Trots det förbättrade resultatet valde lärarna att göra vissa förändringar inför den sista lektionen i cykeln som de antog skulle få fler elever att lära sig.

## Lektion 3

Precis som i de två tidigare lektionerna var elevernas uppgift att finna ekvationsuttryck till ett givet exempel och tvärtom. Men under den tredje lektionen i cykeln gavs eleverna också uppgiften att välja en lämplig ekvation bland såväl korrekta som inkorrekta förslag. Exempelvis diskuterades om  $M - 8 = K$  och  $M - M = 8$  var korrekta sätt att teckna en ekvation för exemplet

”Marta har 8 kulor fler än Karin”. Detta gav eleverna möjlighet att se en mer komplex bild av hur symboler kan beteckna variabler i en ekvation. Följande ekvationer diskuterades:

$$\begin{aligned} K + 8 &= M \\ M - 8 &= K \\ 8M &= K \\ M &= J - 8 \\ M - M &= 8 \\ K &= M - 8 \\ X - Y &= 8 \\ 8 - M &= K \\ M - K &= 8 \\ 8 + K &= M \\ o + 8 &= \Delta \end{aligned}$$

Liksom i de båda tidigare lektionerna visades hur del/del/helhetsrelationen kan beskrivas på olika sätt genom att positionerna varieras ( $M - 8 = K / K = M - 8$ ). Att bokstäverna kan väljas godtyckligt kom fram genom att symbolerna varierades. Så visades tex att  $K + 8 = M$  också kan skrivas  $o + 8 = \Delta$ , dvs Karins ålder kan betecknas med  $K$  eller  $o$  samt Martas ålder med  $M$  eller  $\Delta$ . I detta avseende var lektion 3 lik lektion 2. Vad som var unikt under lektion 3 var att det godtyckliga valet av symboler kom att framstå på ett ännu tydligare sätt. Man diskuterade huruvida ekvationen  $M = J - 8$  kunde anses vara en korrekt representation för exemplet. Man kom fram till att detta kunde vara ett korrekt skrivsätt, förutsatt att antalet kulor som Karin hade representeras med  $M$  (istället för  $K$ ). Detta ”radikala” byte av bokstavs-symboler, dvs att byta bokstaven  $K$  för anta-

let kulor som Karin hade mot bokstaven  $M$  (som tidigare hade betecknat antalet kulor som Marta har) lyfte fram godtyckligheten i valet av symbol ännu mera. Vår tolkning är att detta på ett tydligare sätt än vad som var fallet i den tidigare lektionen visade att den beteckning (bokstav eller annan symbol) som används för variabeln inte är given, utan är en definitionsfråga.

## Vad var möjligt att lära?

I en Learning study är vi främst intresserade av att utveckla undervisningen så att eleverna får möjlighet att lära sig det vi har avsett. Vår slutsats är att eleverna under den sista lektionen i cykeln hade störst möjlighet att lära sig det som lärarna ville, nämligen hur man kan skriva ett ekvationsuttryck för ett givet exempel och att valet av bokstavs-symbolerna är godtyckligt. För att få reda på detta gavs (som nämndes ovan) en uppgift på eftertestet som gick ut på att eleverna skulle skriva två olika ekvationer för exemplet ”ett äpple och en gurka kostar 15 kronor tillsammans”. Som framgår av tabell 1 lyckades majoriteten av eleverna i alla klasserna att hitta två olika ekvationsuttryck. Endast 13,8 respektive 11 % klarade inte detta. Men andelen elever som ändrade bokstavssymbolerna (dvs de använde andra än variabelernas begynnelsebokstaver) var vanligare efter lektion 2 och 3 (19 respektive 35 %). Det var alltså vanligare i de två sista cyklerna att eleverna spontant valde t.ex.  $\dot{A} + G = 15$  och  $X + B = 15$  som olika ekvationer för samma

Tabell 1. Resultat på eftertest. Andel och antal elever i respektive klass som ändrade symbolernas position respektive symboler när de skrev två olika ekvationsuttryck för exemplet ”ett äpple och en gurka kostar 15 kr

	Använder samma bokstäver, ändrar position	Använder olika bokstäver, samma position	Inget eller felaktigt svar
Lektion/klass 1 n = 23	87% (20)	0% (0)	13% (3)
Lektion/klass 2, n = 26	73% (19)	19% (5)	8% (2)
Lektion/klass 3, n = 27	59% (16)	30% (8)	11% (3)

exempel. Detta skedde inte alls bland eleverna som undervisats i den första cykeln (klass 1). I klass 3 var det två elever som ändrade både variabelernas ordning och de valda symbolerna (tex  $\dot{A} + G = 15$  och  $15 - X = Y$ ).

## Slutsatser

Vår analys visade att de tre lektionerna var olika när det gäller hur det innehåll som man avsåg att eleverna skulle lära sig hantades under lektionen, särskilt när det gäller hur symboler väljs och används för att beteckna variabler i en ekvation. Att valet av symboler är godtyckligt kom inte alls fram under lektion 1. I stället förefaller det som om eleverna under denna lektion fick uppfattningen att bokstavssymbolerna står som en slags förkortning för det som variabeln betecknar (jfr Küchemann i Booth, 1984). Att så var fallet, blev inte lärarna medvetna om förrän de hade studerat resultatet på eftertestet och den inspelade lektionen. Vi tolkar det så att när de planerade den första lektionen i cykeln fanns det aspekter av sättet att beteckna en variabel som de inte var medvetna om utan tog för givna. I och med att de inte såg detta själva, kunde de inte heller förutse hur eleverna skulle komma att förstå detta. Det som man själv behärskar kan ibland vara så självklart att man förbiser att det kan vara en stötesten för elevernas lärande. Om man underlåter att lyfta fram vissa aspekter av undervisningsinnehållet kan detta leda till en viss sorts förståelse hos eleverna som man inte hade tänkt. Genom Learning Study-processen uppenbarades det för-givet-tagna för lärarna och de lyckades att ändra sin undervisning på ett sätt som gynnade elevernas lärande.

## LITTERATUR

- Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor: NFER- NELSON.
- Cobb, P., Confrey, J., di Sessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32 (1), 9-13.
- Holmqvist, M. (red.) (2006) *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in early grades: What is it? *The Mathematics Educator* (Singapore), 8 (1), 139-151.
- Knuth, E.J., Alibali, W.M., Mc Neil, M.N., Weinberg, A., & Stephens, C.A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt fur didaktik der mathematik*, 37 (1), 68-76.
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change.* Philadelphia: Research for better schools inc.
- Marton, F. & Tsui, A. B.M.(2004). *Classroom-discourse and the space of learning.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B.M.,(2004). The space of learning. I F. Marton, & A. B.M. Tsui (red.) *Classroomdiscourse and the space of learning.* (pp 3-40). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Marton F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahawa, N.J.: Erlbaum.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I C.K.N. Bernarz, L. Lee (red.) *Approaches to algebra.* The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Pang, M.F. & Marton, F. (2005). Learning theory as teaching resource. Enhancing students understanding of economic concepts. *Instructional science*, 33, 159-191.
- Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.
- Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A case of Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development.* Unpublished doctoral thesis, University of Illinois.
- Runesson, U. (2004). Med lärandets innehåll i fokus. *Nämnamnaren* 31 (1).