

Mattecirkus

Vi får möta en mattelärarmamma som alltid testat sina undervisningsidéer på sina barn och en dotter som är cirkuskonstnär. Med utgångspunkt i cirkusdiscipliner har mamma Kerstin synliggjort matematiska begrepp, tankesätt, problem och termer och dottern Sofia har utvecklat cirkusuppgifter där matematiken lyfts fram. Resultatet är jonglering och mänskliga pyramider som är fyllda av upplevd matematik.

Jag, Sofia, är cirkuskonstnär. Som 13-åring blev jag värvad till *Ung Cirkör* och nu 15 år senare har jag uppträtt runt om i hela Sverige, halva Europa och även åkt med *Clowner Utan Gränser* till Kambodja. Jag har också lärt ut cirkus till barn, ungdomar och vuxna. Läsåret 2015–2016 jobbade jag som vikarie-rande lärare i årskurs 2. Där kommer Kerstin in i bilden. Hon är en mästare på att möta eleverna på deras nivå och sedan få med dem framåt. Hon är dessutom en mattedidaktik-entusiast av stor rang och man kan se hur det lyser i ögonen på henne när hon är med om elevernas framsteg. Självklart bollade jag alltså didaktikfrågor med henne. Hon lärde mig bland annat att "gruppering" och "inverser" är redskap som rustar barnen för att utveckla goda matematikkunskaper och att ju fler sätt de kan räkna ut saker på desto säkrare blir de både på att beräkna och förstå hur beräkningarna fungerar. Hon gav mig stöd för att vara kreativ i min undervisning. Så min lilla specialmattegrupp (med elever som inte nådde målen) satt tex och klippte i rutat papper för att analysera sambanden mellan multiplikation och addition, hitta mönster och bevisa samband visuellt. Specialläraren på skolan följde elevernas utveckling och nästan alla nådde målen i slutet av läsåret.

I december 2016 gjorde jag något fräckt. Minuterna efter att min mamma disputerat i matematikdidaktik – innan hon hunnit landa och framförallt innan hon hunnit få alla de andra jobberbjudanden jag förstått att hon skulle få – så skakade jag hand med henne om att vi skulle jobba med Mattecirkus ihop. Då hade jag varit med och utvecklat Cirkus Cirkörs cirkusmatte och förstått hur mycket längre det går att ta det med hjälp av en matematikdidaktiker.

Jag, Kerstin, blev alltså haffad av min kreativa dotter Sofia för att diskutera vilka gratistillfällen till värdefull matematik som redan finns i cirkusövningar. Detta ledde till många roliga och givande diskussioner som resulterade i att vi utvecklade Mattecirkus för elever i F–3. Vår mattecirkus är cirkus där vi synliggör den matematik som finns i övningarna och där matematiken gör det lättare att utföra konsterna. Vi erbjuder möjligheter att lära och uppleva matematik utan att matematiken är i fokus. Vi har två olika teman, det ena är jonglering där vi arbetar med kodspråk, som vi beskrev i ett Uppslag i förra Nämnamnaren, och det andra är mänskliga pyramider. I den här artikeln berättar vi hur en första lektion med pyramidbyggande kan se ut och vilken matematik som eleverna får uppleva.

Uppvärmning

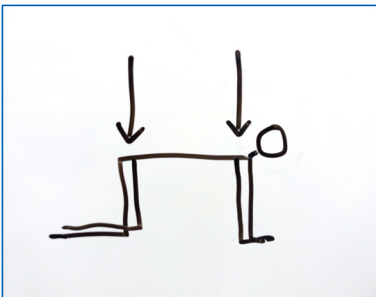
Vi börjar med att låta alla släppa loss och röra sig fritt i ett rum utan möbler, gärna till musik. Vi uppmuntrar och inspirerar eleverna att röra sig knasigt genom att själva lufsa, dansa, skutta och gå på roliga sätt. Här får barnen – och vi – upp pulsen och blir varma och glada. När en av oss klappar i händerna ska eleverna lyssna efter hur många klappar vi gör och snabbt bilda grupper med lika många barn i gruppen som antalet klappar.

Exempel: 24 barn skuttar runt, Sofia klappar fem gånger och de bildar fyra grupper om fem och fyra barn som inte blev en 5-grupp. Kerstin skriver tex $4 \cdot 5 + 4 = 20 + 4 = 24$. Vi samtalar om att det inte alltid går jämnt upp när man delar, vilket barnen är väl bekanta med från lekar och spel, men inte alltid då det är skolmatematik. Nästa gång klappar Sofia tre gånger och barnen grupperar sig. Tillsammans med gruppen räknar Kerstin till åtta grupper med tre barn. Hon skriver kanske $8 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$, eller $24 = 8 \cdot 3$. Hur anteckningen görs beror på vad vi vill fokusera. I nästa vända kan det bli sex klappar och vi skriver det med siffror och matematiska symboler.

Initialt låter vi barnen räkna hur många grupper det är och hur många de är i varje grupp samt eventuella extra elever. Ibland dröjer det flera vändor innan eleverna inser att det alltid är samma summa eftersom det är lika många elever som finns i rummet oavsett hur de grupperar sig. Andra gånger fokuserar vi på att se att det finns flera olika sätt att skriva samma antal. Eleverna får alltså uppleva antalskonstans, gruppering, delbarhet, division och multiplikation med både kroppen och symboliskt med siffror och matematiska tecken. I de flesta klasser ser vi till att eleverna får konstatera att om grupperna de delar in sig i är dubbelt så stora blir det hälften så många grupper och tvärtom. Ibland gör vi detta med 2 och 4 klappar och ibland med 3 och 6 klappar.

Oberoende av elevernas respons och vilka tal vi har använt som delare ser vi till att det finns möjlighet att fundera över kommutativitet. Det gör vi exempelvis genom att dela 24 i både 4 och 6 och visar på tavlan att vi har skrivit $4 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6$ och $6 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ och att båda är 24. Vi ställer frågan om det alltid är så att man kan byta plats på antalet grupper och antalet barn i grupperna. Det ser ju inte så ut i den upprepade additionen.

Sedan fortsätter vi med en tillits- och ansvarstagarövning där eleverna arbetar två och två. Den ene agerar robot och den andra robotskötare. Övningen syftar framförallt till att visa vikten av att vara seriös som kontrast till att springa och skutta omkring hur som helst i den första uppvärmningsövningen. Detta är oerhört viktigt för att inte skada sig själv eller någon annan samt att våga lita på sina kamrater.

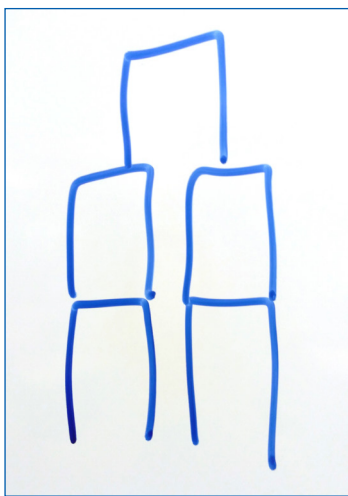


Pyramider

Vi visar på ett clownaktigt sätt hur man inte ska stå för att vara en stabil "byggkloss" i en mänsklig pyramid. Som avslutning blir vi båda seriösa igen (roligt ord för många på lågstadiet) och en av oss blir ett stadigt bord, som på bilden. Den andra visar var på bordet man kan placera nästa byggkloss, nämligen rakt över benen respektive armarna (som ska vara raka), dvs på höften och axlarna. Detta upprepar vi ett flertal gånger och vi ber eleverna sätta ord på det. Det är mycket viktigt att inte någon sätter vikt mot mitten av ryggen samt

– förstås – att alla är varsamma mot varandra. Efter det delar vi upp eleverna i grupper om 3–6 elever som fritt får konstruera egna pyramider i 5–10 minuter. Därefter får de visa upp sina pyramider i en liten minicirkusföreställning.

När eleverna visar sina pyramider tecknar Kerstin av dem som schematiska bilder, matteskisser. Dessa använder vi sedan för att diskutera olika aspekter av vad som är lika respektive olika i dem, tex om pyramiden är symmetrisk och hur de vet det. I samband med matteskisserna klargör vi att en matteskiss inte bör vara detaljerad, det är de viktiga matematiska idéerna som ska gestaltas. Det ska gå fort att skissa och de ska vara tydligt att avläsa, då kan skissen fungera som stöd för tanken både vid beräkning och problemlösning. Här får eleverna även se hur vi byter från en helt konkret situation (en mänsklig pyramid) till en ikonisk bild (matteskissen). Därefter är det dags för pyramidspelet!

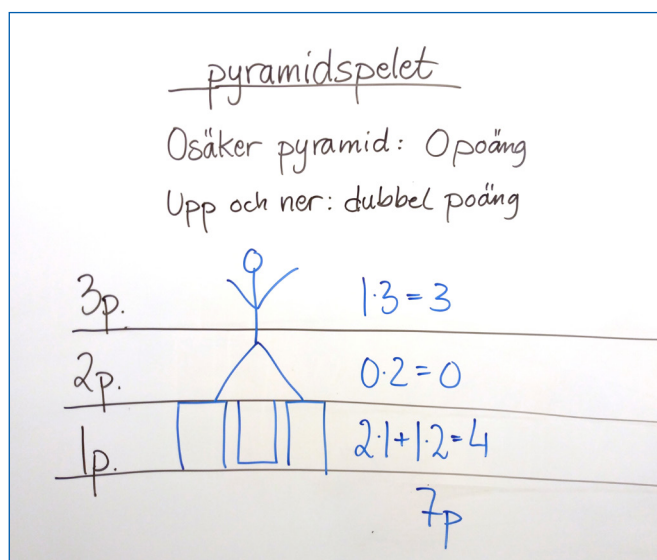


En mänsklig pyramid i verkligheten och beskriven med en matteskiss.

Pyramidspelet

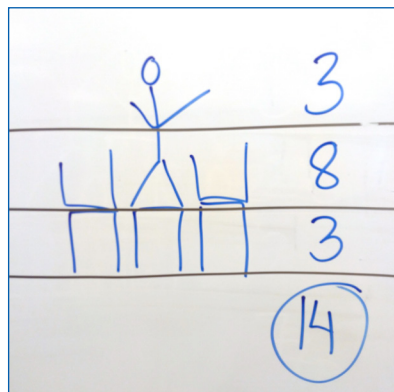
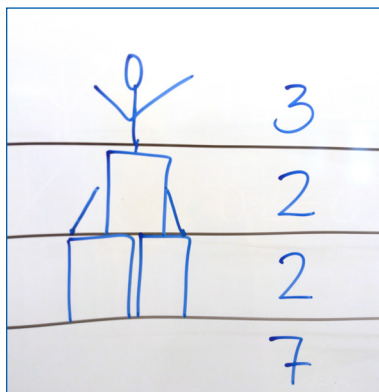
Vi skriver och ritar upp reglerna för spelet, se nästa sida. Varje elev i det första lagret ger 1 poäng, varje elev i andra lagret ger 2 poäng och i tredje lagret är varje elev värd 3 poäng. Om en elev är upp och ner dubblas hens poäng. Om pyramiden är osäker blir det dock 0 poäng. När alla har förstått reglerna får grupperna i uppdrag att skapa en pyramid som är värd exakt x poäng. Om vi har grupper om 5–6 elever kan 9 poäng vara lagom medan elevgrupper om 3–4 får satsa på 6-poängspyramider. Eftersom uppdraget är att nå en specifik poängssumma, riskerar vi inte att eleverna börjar tävla om vem som bygger högst för att få flest poäng.

I pyramidspelet utmanas eleverna att planera och kommunicera om hur de tänker. De kan variera antalet barn i olika lager och hur många som dubblar sin poäng genom att vara upp och ner. Eftersom en dubblad poäng blir 2 i nedersta lagret och 4 i det andra, är det mycket att hålla ordning på samtidigt som det ska gå att bygga pyramiden på ett säkert sätt. Här får eleverna alltså utveckla sin problemlösningsförmåga i samarbete med andra.



Pyramidspelets regler.

När det är dags för nästa uppvisning, visar eleverna en pyramid i taget. Sofia bedömer om den är säker eller får 0 poäng. Kerstin ritat av den med en mat-skiss och vi räknar tillsammans ut hur många poäng den är värd. Om pyramiden inte är värd rätt antal poäng, hjälps hela elevgruppen åt att komma med förslag hur de kan korrigera det. Här går vi från en konkret representation till en ikonisk där vi kontrollräknar både i pyramiden och i skissen och slutligen noterar med matematiska siffror och symboler, dvs vi transformerar mellan olika representationer.



Exempel på poängsatta pyramider.

I slutet av lektionen samlas vi och låter eleverna reflektera över vad vi har gjort, vad som har varit nytt, hur de har upplevt lektionen och vad de har lärt sig.

Uppföljningslektioner

Det här var alltså endast en introduktionslektion. Följande lektioner kan vara både mattecirkuslektioner eller matematiklektioner där vi tar med oss erfarenheterna från uppvärmningen och pyramidspelet in i klassrummet och arbetar vidare med den matematik som introducerades. Här ger vi ett litet axplock av alla de möjligheter som finns för att följa upp matematiken i fortsatta mattecirkus- och matematiklektioner.

Invers och kommutativitet

För att belysa den inversa relationen mellan multiplikation och division kan uppvärmningsövningen skrivas både som multiplikation och division.

Alla divisioner med två kan ses som att vi hittar hur många grupper det blir i klassen då vi klappar två gånger (innehållsdivision) eller att vi delar upp klassen i två halvor (delningsdivision). Hur många klappar behöver det vara för att vi ska få två grupper? Hur kan vi förstå förhållandet mellan dessa tal?

Frågan om kommutativitet lämpar sig bättre att fundera på och diskutera i ett vanligt klassrum. Eftersom de flesta läromedel envist beskriver multiplikation som upprepad addition av lika stora grupper, kan det vara en bra undersökande aktivitet att försöka hitta argument som tydliggör att det inte är en slump att multiplikation är kommutativt. Det finns elever som långt upp i skollåren tror att multiplikation inte är kommutativt om den ena faktorn är mycket större än den andra. Här kan laborativt material och matteskisser fungera som hjälpmedel för eleverna att få syn på hur det förhåller sig. Man kan låta eleverna ställa sig i olika rektangelformationer (som äggen i en äggkartong) och konstatera hur många rader med barn det är och hur många barn det är i varje rad och jämföra med antalet kolumner och antalet barn i varje kolumn. Vi kan översätta den konkreta representationen av levande barn till en matteskiss och till matematiskt symbolspråk. Här finns rika möjligheter att jämföra de båda aspekterna av multiplikation, som lika stora grupper och som en rektangelformation. I båda fallen kan vi sedan använda upprepad addition för att räkna ut det totala antalet elever, vilket inte är samma sak som att lura i eleverna att multiplikation är upprepad addition.

Fler pyramider

Som uppföljning i nästa mattecirkuslektion får eleverna nya uppdrag i pyramidspelet. Vi utmanar dem att hitta sätt att klara sig under en viss poängsumma ($< x$) eller att komma inom ett intervall som $5 < x < 8$. För att göra det mer spännande har vi en hatt som eleverna får dra en lapp ur för att avgöra hur många poäng pyramiden ska vara värd. Ur en annan hatt dras antalet barn som ska vara med. Eventuellt kan en tredje hatt läggas till som anger antalet lager. Här kan större grupper samarbeta för att lösa problemet och vi kan bestämma att det ges extrapoäng för en symmetrisk pyramid.

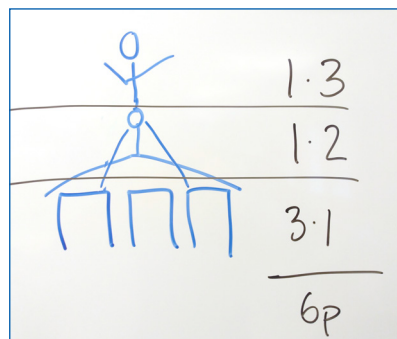
I matematikklassrummet kan pyramidspelets utmaningar undersökas vidare genom att utforska hur många olika lösningar det finns till en viss poängsumma med ett visst antal barn. Här blir det en utmaning att vara systematisk så att eleverna vet att de fått med precis alla möjliga pyramider. Eleverna kan tänka ut olika sätt att skapa säkra pyramider för ett visst antal barn och en viss poängsumma, skissa dem på ett papper och sedan testa att bygga dem. Då går vi i

motsatt riktning, från matematiskt symbolspråk och ikoniska representationer till det konkreta pyramidbyggandet.

En symmetrisk pyramid i tre lager kan byggas av $3+2+1$ personer, vilket är det tredje triangeltalet. Pyramidbyggande kan utvecklas till lektioner om mönster med triangelantal, men också till tankar om delbarhet. Summan av de tre konsekutiva talen 1, 2 och 3 är delbar med 3. Det stämmer också för en pyramid med $6+5+4$ personer, även 15 är delbart med 3. Är summan av tre konsekutiva tal alltid delbar med 3? Hur kan vi visa att det stämmer? Om vi vill bygga en 3-lagerspyramid med hela klassen, hur kan vi använda detta samband för att räkna ut hur många som ska vara i de olika lagren?

Pirrigt och roligt

Mattecirkus är ett annorlunda sätt att uppleva matematik på. Barnen får vara fysiska och kreativa medan de använder sina aritmetikkunskaper i en problemlösningssituation. Under uppvärmningen får eleverna praktiskt erfara att summan är konstant oavsett hur de grupperar sig och en mängd olika sätt uttrycka samma summa med matematiskt skriftspråk. Eleverna tränar att byta representationsformer, göra matteskisser och att samarbeta samtidigt som de utmanar sig själva och har roligt, vilket följande elevkommentarer visar: *Det är roligt när alla gör sitt bästa och samarbetar och Först var det pirrigt, men när jag vågade prova var det jättekul!*



Tre olika representationer: konkret, ikonisk och symbolisk.