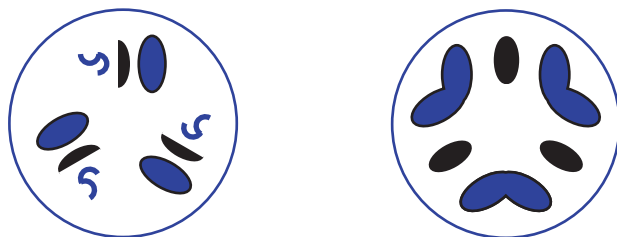


Symmetri – skön matematik för många sinnen

Symmetri förekommer inom bilder och att skapa symmetriska bilder kan berika undervisningen i matematik. Med hjälp av bilderna kan förståelsen öka. I denna artikel behandlas några symmetrier i bilder.

Symmetri är ett begrepp, som kan berika matematikstudierna i alla åldrar. En forskare kan använda begreppet algebraiska grupper för att studera symmetrier, medan en 7-åring kan iaktta fotspåren i sanden vid gång, jämfotahopp etc. Symmetri finner vi överallt omkring oss. Att hitta symmetrier eller att skapa dem i egna bilder är ett bra sätt att få struktur och underlätta för hjärnan att minnas bilden och "förstå" den. De kan också bara vara vackra att titta på. Många dekorationer bygger på olika slag av symmetri. Symmetrier är en form av mönster som kan ge upphov till många matematiska tankar. Vackra men också intressanta illustrationer av symmetrier kan man göra med hjälp av OH-ark och en kopiator eller med hjälp av dator.



Symmetrier i en cirkel

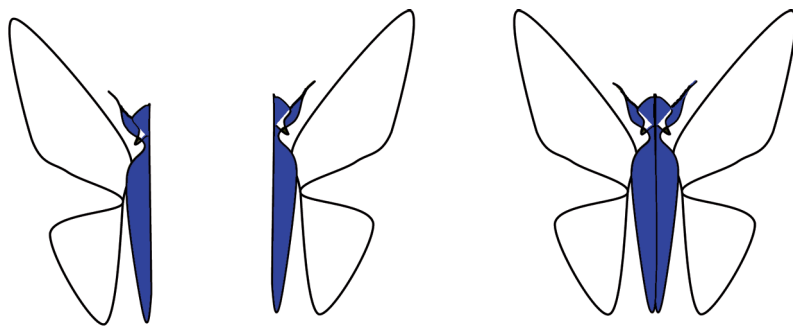
Om man tittar på bilderna ovan så har de något olika typ av symmetri. Båda har egenskapen att om man vrider medurs ett tredjedels varv runt centrum så går båda bilderna över i sig själva. Den högra bilden har dessutom en *spegelsymmetri* efter en lodrät linje genom centrum. Du hittar nog två spegellinjer till.

Men vad är en symmetri egentligen? Rent praktiskt kan vi illustrera det så här. Gör en kopia av en bild på ett OH-ark och försök placera denna på något sätt så att den exakt täcker den ursprungliga bilden. Det är tillåtet att vända på arket. Självklart kan man alltid lägga kopian på OH-arket precis över den ursprungliga bilden, men om det finns ytterligare sätt att placera kopian så att den täcker bilden så har man en symmetri. Över den vänstra bilden kan vi lägga OH-arket på tre olika sätt, nämligen vridet 0° , 120° och 240° . I den högra kan

man förutom de tre vridningarna vända på arket och göra tre olika vridningar. Totalt har man då sex olika lägen där vi kan placera kopian exakt över bilden.

Varje punkt i bilden flyttas till ett nytt läge, dvs läget för motsvarande punkt på OH-arket. För vissa punkter är det nya läget detsamma som det ursprungliga. Sådana punkter kallas *fixpunkter*. Här är cirkelns centrum alltid en fixpunkt. Speglar vi den högra bilden i den lodräta linjen dvs vänder på OH-arket utan att vrida det så är alla punkter på lodlinjen fixpunkter. Vad som är viktigt här är att avståndet mellan två punkter alltid är detsamma på OH-arket som på den ursprungliga bilden och detta gäller för alla par av punkter. Matematiskt kallas detta en *isometrisk avbildning*.

Låt oss göra en enkel bild med symmetri i en cirkel. Cirkeln behöver vi inte rita ut om vi inte vill. Den är bara till för att begränsa bilden så den får plats på pappret. Rita en bild, t ex en halv fjäril. Gör sedan en spegelbild av den och sätt ihop delarna. På detta sätt får vi en enkel symmetri, där det bara finns två sätt att placera en OH-kopia över bilden så att den exakt täcker bilden.



Ritad bild

Speglad kopia

Symmetribild

Tapetbårder

I stället för att begränsa mönstret med en cirkel kan man bestämma att mönstret ska finnas mellan två vågräta linjer. Exempel på sådana symmetrier hittar man på tapetbårder. Ett annat exempel är fotspår i snö eller sand. Vilka symmetrier kan vi hitta här? När man trycker en tapetbård upprepas motivet för varje varv som tryckrullen gör. Vi kallar den minsta delen av bården som tryckrullen måste innehålla för att kunna trycka hela bården för *mönsterrepetitionen*. Detta ger den enklaste symmetrin av alla: samma figur upprepas med ett bestämt avstånd. Eftersom vi ska hålla oss mellan linjerna kan vi endast flytta i en riktning, vågrätt. Alla punkter flyttas en bestämd vågrät sträcka. I matematiken kallas detta för en *translation* eller *parallellflyttning*.

Man kan illustrera denna symmetri genom att hoppa på en fot rakt fram på en sandstrand eller i snö (då helst med skor på).

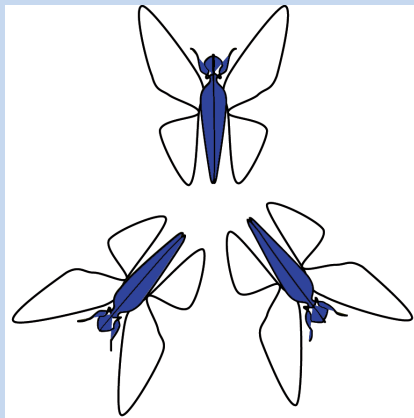


Gör en bild med enkel symmetri

Låt eleverna rita enkla bilder. Kopiera varje bild på ett OH-ark. Kopiera både rättvänt och spegelvänt. Klipp ut delarna och klistra ihop dem intill varandra. Har man inte tillgång till en kopiator kan man lägga ett OH-ark över bilden och kopiera för hand.

Det går också att rita med dator. I programmet Word finns kommandon för kopiering, spegling, vridning osv. Ett tips är att markera hela bilden och välja *Rita* --> *Gruppera* innan man kopierar, speglar etc.

Lek sedan vidare och gör t ex tre kopior och forma bilden nedan.



Man kan välja att rotera 180°, 120°, 90°, 72°, 60°, osv men det måste alltid vara en heltalsdel av ett helt varv, annars spårar det ur, och gradskiva rekommenderas. Det finns många möjliga kombinationer men arbetar man i Word är det bäst att bara vrida 180° eller 90°. Annars får man försöka att vrida på fri hand och mäta in t ex 120°.

När bilden är färdig kan man undersöka vilka typer av symmetrier det finns genom att bestämma på hur många olika sätt en OH-kopia kan tänkas placeras över bilden.

Undersök också symmetrierna på navkapslar på bilar. Bilder på sådana kan man hitta på Internet.

Man behöver bara utgå från bilden av en mönsterrepetition, dvs det inom den streckade rektangeln, för att kunna skapa hela bården. Om vi tänker oss en bild av spåret eller tapetbården som upprepar sig långt åt såväl höger som åt vänster så kan vi återigen beskriva symmetrin genom att tänka oss en OH-kopia av mönstret. Flyttar vi OH-remsan ett eller flera steg åt vänster eller höger så täcker den åter vårt mönster exakt. I praktiken blir det lite fel i ändarna. Men vi kan alltid i tanken föreställa oss att mönstret är ändlöst åt båda håll och att bilden bara är en del av hela mönstret. Vi kan jämföra med tallinjen som inte har något slut åt något håll och att vi alltid bara ritat en del av den.

Fler symmetrier på rad

Vridningar: Om vi håller oss mellan två vågräta linjer kan vi bara vrida 180°, annars ramlar vi utanför linjerna. Detta kan man illustrera genom att hoppa på en fot och snurra ett halvt varv mellan varje hopp. Det kräver god balans eller hjälp av en stödjande kamrat. Men det finns ett något enklare sätt att göra detta spår, i sanden.



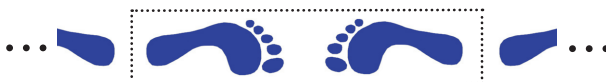
Här är mönsterrepetitionen två fötter men på grund av symmetrin behöver man bara utgå från halva mönsterrepetitionen för att skapa hela mönstret. Även här täcker en OH-kopia exakt hela mönstret om vi vrider den ett halvt varv runt en punkt mitt mellan två stortår eller mellan två hälar.

Speglingar: Vi kan spegla lodrätt eller vågrätt utan att ramla utanför linjerna. Vågrät spegling får man om man hoppar jämfota.



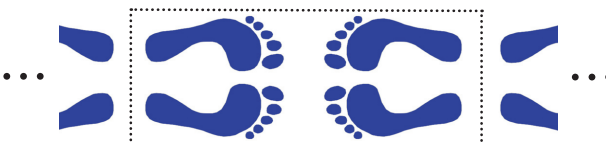
Även här behöver man bara halva mönsterrepetitionen för att skapa hela mönstret. Om vi undersöker med vår OH-kopia täcks mönstret om vi också vänder på den.

Lodrät spegling får man om man vrider sig ett halvt varv mellan hoppen och samtidigt byter fot hela tiden. Detta är inte lätt att göra i verkligheten.



Nu måste vi vända på vår OH-kopia så att höger och vänster sida byter plats och sedan kan vi täcka mönstret.

Kombinationer: Om man speglar både lodrätt och vågrätt behöver man bara en fjärdedel av mönsterrepetitionen för att skapa den och sedan upprepa åt vänster och höger. Detta kan illustreras av jämfotahopp med vridning mellan varje hopp.



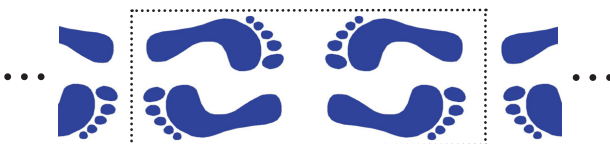
Här kan vi vända OH-kopian på båda de sätt vi gjorde ovan. Men vi kan också vrida den ett halvt varv, så vi har även vridningssymmetri. Kombinerar vi symmetri med vridning och spegling lodrätt får vi på köpet även symmetri med vågrät spegling och vice versa.

Finns det fler möjligheter? Ja det gör det, för ännu har vi inte berört vanliga fotspår utan hopp och vridningar. Vilken symmetri har vanliga fotspår? Jo, det är en kombination med vågrät spegling och translation.



Om man kopierar vänstra halvan av mönsterrepetitionen, speglar vågrätt och flyttar ett halvt mönstersteg åt höger (eller vänster) så får vi hela mönsterrepetitionen. Här är det korta steg längs en rät linje (som vid ett nykterhetstest) men det fungerar på samma vis om man går som vanligt. Denna kombination av spegling och förskjutning kallas *glidreflektion*.

Slutligen kan man kombinera en glidreflektion och lodrät spegling och få ett mönster som detta. Det gör man i praktiken enklast genom att gå som vanligt och sedan vända om och gå tillbaka mellan de tidigare spåren.



Här räcker det att ha en fjärdedel av mönsterrepetitionen för att skapa hela mönstret.

Man kan visa att dessa sju olika typer av symmetrier är de enda som överför en (oändligt) lång bård på sig själv. Mönstret skapas av hela, halva respektive en fjärdedel av mönsterrepetitionen. I dessa exempel är det en vänsterfot men den kan bytas ut mot vilken rektangulär bild som helst. Även här kan man arbeta med OH-ark och kopiator eller med dator för att göra egna bårder med någon av symmetrityperna.

Tapetmönster

Om man inte begränsar sig till symmetrier inom ett band eller en cirkel får man symmetrier över hela planet. Dessa kallas ofta för tapetmönster. Då finns fler möjligheter, tex vridning ett tredjedels- eller fjärdedels varv och totalt finns det 17 olika sorters symmetrier i planet.

Mer om de totalt 17 olika symmetrierna i planet finns att läsa i Frode Rønnings artikel *Symmetrier i islamiska mönster*, sid 12–19.

På Nämnaren på nätet finns artikeln *Matematikk og ornamentikk – opplegg for grunnskolen*. Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet ved NTNU/Vitensenteret i Trondheim beskriver där ett antal aktiviteter för klassrummet som anknuter till innehållet i Thomas Martinssons artikel. Se också: www.viten.ntnu.no/matematikk.php