

Livet, matematiken och skolan

TORD GANELIUS

Följande artikel är från ett mycket uppskattat föredrag vid matematikbiennalen 1980.

Efter att inledningsvis konstatera att det räknas för mycket och talas för litet matematik i skolan lägger professor Ganelius fram två teser — ”Alla människor är matematiker” och ”Matematikens stora betydelse i samhället är som kulturelement”. Med dessa teser som ledstjärna skulle alla människor upptäcka ett intresse för problem och en känsla för matematikens innehåll. Avslutningsvis diskuteras miniräknarens roll i skolan och samhället.

Lärarnas tystnad

”Till skoldebattens egendomligheter hör att de som deltar i den i stor utsträckning är människor som inte själva jobbar inom skolan. Professorer, docenter, journalister och författare framträder t ex gärna med sina synpunkter. Lärarna däremot, som har egna erfarenheter av vad det handlar om, är en på det hela tystlåten grupp.”

Så skriver en författare, Mats Wahl, som många av er säkerligen känner till genom hans böcker där han med utgångspunkt från egna erfarenheter som lärare diskuterar intressanta skolproblem.

Jag står nu här som representant för den misstänkliggjorda gruppen då biennalen börjar lida mot sitt slut. Jag hoppas verkligen att det intryck jag fått är riktigt, nämligen att denna biennial visat sig vara ett lyckat initiativ, där lärarna haft tillfälle att vara något mindre tystlåtna än vanligt.

Men jag, vad har jag för ursäkt, att som det sades, ”gärna framträda med mina synpunkter”, professor som jag är, inför ett så blandat auditorium av lärare i matematik på nästan alla tänkbara stadier, och dessutom med en pretentiös (om än innehållslös) föredragstitel: Livet, matematiken och skolan. Och jag får väl tillstå, att jag trots en lagom nervositet, gör det gärna, jag är glad över att få vara med.

Jag tänker inte ursäkta min närvaro med att hävda någon sorts

sakkunskap om skolans arbete byggd på mina verksamheter eller på erfarenhet som förälder till ett antal barn. Den bistra sanningen är att jag i mitt dagliga arbete är fjärran från skolans problem; jag är numera medarbetare vid en stor institution och där är min speciella uppgift, som jag trivs bra med, att handleda och föreläsa för doktorander, en kategori som om jag förstått det rätt, skolan numera är i det närmaste ointresserad av! Om det rimliga eller orimliga i detta är många villiga att säga mycket, även jag, men jag spar det till senare!

Vad jag får anledning att syssla med utanför forskarutbildningen, är att i någon mån försöka följa med matematikens utveckling och dess varierande samspel med världen i övrigt, eller som i rubriken: livet!

Om jag då återvänder till det inledande citatet så finner jag att det enda beklagliga det beskriver, är lärarnas tystlåtenhet (som biennalen i bästa fall är på väg att bota). Däremot är andras deltagande i skoldebatten en nödvändighet, det skulle väl vara en katastrof om det lämnades åt lärarna ensamma att utan intresse från omvärlden kämpa med lösningen av skolans, nära nog definitionsmässigt, olösliga problem.

Med min bakgrund tycker jag naturligtvis, att det tagits alldeles för litet hänsyn till matematiska synpunkter vid den fortgående deformationen av kurser t ex efter 60-talets gymnasieutredning; matematiska betyder här matematiska i ordets bästa mening, inkluderande vad vissa vill kalla tillämpningar men som jag med mitt naturliga språkbruk ett tag till kallar, dess samspel med livet i övrigt.

Jag är som matematiskt intresserad medborgare mindre oroad av de skolutbildades bristande räknefärdighet — även om också den är oroande — än av deras oförmåga att känna igen ett problem, att veta vad det är att lösa ett problem och deras okunnighet om vad ett bevis är! Detta tycks vara en betydligt mer originell uppfattning än jag hade tänkt mig, och jag har funnit att den minsann inte delas av alla mina professorskolleger. Jag hoppas att den skall irritera er också, så att vi kan få igång ett resonemang om matematik. Jag skulle vilja hävda, att det räknas för mycket och talas för litet matematik; för många människor tycks det vara en chock eller åtminstone en överraskning att man kan tala matematik.



Två teser

För detta föredrag med den mycket allmänna titeln har jag dock valt att diskutera två andra teser av mer generell natur och som jag hoppas skall möta gensagor, även om jag nu hävdar att de inte kan motbevisas. Detta faktum innebär ju inte, att det inte kan finnas andra motstridande teser, som ej heller kan motbevisas (matematik igen).

Jag är alltså helt övertygad om att **alla människor är matematiker** (alla människor är *egentligen* matematiker, alla människor har sinne för matematik osv). **Matematikens stora betydelse i samhället är som kulturelement** (det är lika viktigt att förstå vad som kan beräknas som att kunna räkna, matematik är att vilja lika mycket som att kunna, matematik kan ge den kunskap om den vetenskapliga metoden som varje medborgare behöver etc).

Jag tror alltså att båda dessa hypoteser är så rimliga att man borde ha dem eller snarare deras möjlighet i minnet, när man diskuterar utformningen av matematikämnet på alla stadier. Och även om de inte är exakt sanna, så ger de en beskrivning av verkligheten — på samma sätt som dagstidningarna även om det mesta av det som står i dem är fel, förmedlar en användbar kunskap om världen!

Alla människor har sinne för matematik

Detta är egentligen självklart! Matematik är ju en naturlig aktivitet, lika naturlig som språket. Men har alla nöje av matematik?

Även om endast ett fåtal nu finner att matematik är roligt, så är det inget som säger att inte flera skulle kunna göra det under andra förhållanden och kanske t o m uppfatta den estetiska kvaliteten. — Vi har ju gjort sådana felbedömningar förr: För några år sedan var det axiomatiskt att flickor ej hade sinne för matematik. Jag var ett av de sista studentexamensårens censor i en flickskola, där det väckte stor förstämning, när jag hävdade att man saboterade läroplanen genom att producera examensklasser, där en tredjedel hade C och ungefär lika många B? men knappast något överbetyg. Förstod jag inte att detta var en flickskola där man hade djupa och för flickor lämpade intressen? Numera har vi i de N-klasser som jag har kontakt med i Göteborg kanske 80% flickor utan att uppnå sådana betygseffekter!

Många tror att nöjet och utbytet är beroende av den absoluta prestationen. Därför att det finns elever som, troligen av vitt skilda anledningar, presterar mycket och lätt, tror man att glädjen i framstegen är förbehållen dem. Vi resonerar inte alls på samma sätt när det gäller idrott: Björn Borgs och Ingemar Stenmarks excellens anses inte motivera att alla andra ungdomar slutar att idrotta, snarare tvärtom nyttjas de som inspiration, inte minst av den kommersialiserade idrottsrörelsen. — Och, för att gå något vidare, vem vet om inte jag är lika glad om jag lyckas

hoppa en meter i höjdhopp som många expert när han hoppar två?

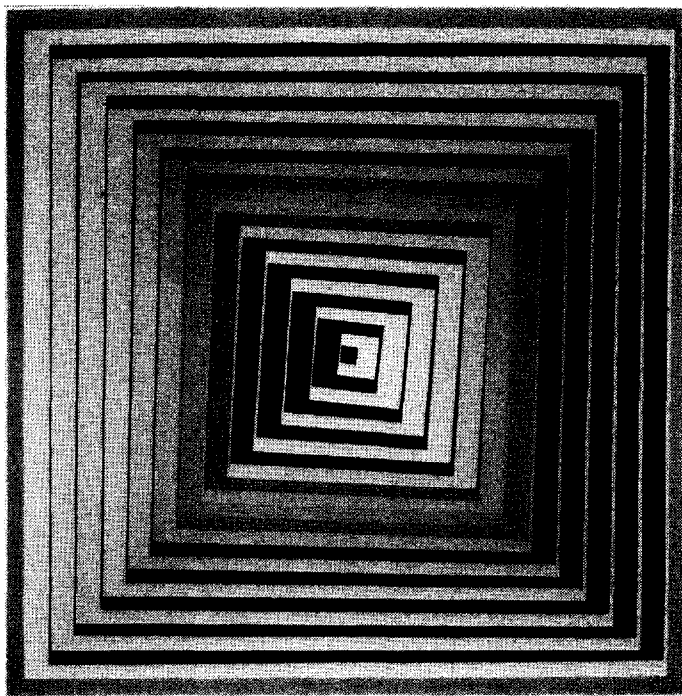
Om vi lämnar analogierna så har vi de mer konkreta erfarenheterna att de små barnen gillar matematik och räkning, och detta tycks så vitt jag förstått gälla ganska oberoende av ändringar och moderniseringar (som oroar föräldrar och möjligen lärare mera). Att sedan detta intresse i hög grad försvinner under hanteringen i skolan, kan naturligtvis bero på barnens tilltagande mognad, men vem vågar utesluta att vår bristande tro på att alla barn är matematiker medverkar?

Mina utflykter i skilda bildningsskikt av det svenska samhället har ingett mig tron att den negativa inställningen till matematiken är mer koncentrerad till bildade klasser än till folk i gemen. Jag har träffat på förståndiga språklärarinnor som inte kunde spela bingo (i och för sig en lovvärd attityd) därför att de aldrig förstått matematik och jag känner professorer i naturvetenskapliga ämnen, som blir helfrustrerade om de ställs inför uppgifter från högstadiematematiken. Jag vägrar att tro, att sådana reaktioner har sin förklaring i den andliga utrustningen; jag tror att det är effekter av misslyckad pedagogik och bildningspropaganda. Den stora faran är, att våra stelbenta urvalssystem skapar en skola, där lärare som skall förmedla entusiasmen för matematik, själva är knäckta och omhuldar en tro på matematik som en exklusiv minoritets nöje, och som genom sin bristande förståelse för att alla människor egentligen är matematiker hämmar en avspänd utveckling.

I mina mörka stunder ser jag ett samhälle där skolan och alla dess administrativa organ översvämmas av allmänbegåvade men oförlösta och därför negativa och tvivlande matematiker, medan samhället i övrigt vimlar av knep- och knåpintresserade amatörer, allmänt obegåvade bridgespelare och än värre spelare, som visar hur spritt intresset för lösande av problem, alltså för matematik, är.

Jag är övertygad om att en riktigare uppfattning av matematikens natur och väsen skulle hjälpa till att undanröja mycket av tron på matematik som något som bör förbehållas de specialbegåvade, alltså kunskapen om att matematik är ett intressant system som väl förstått ger möjlighet till tillämpning på problem av alla slag, från veckotidningars huvudbry till samhällsviktiga frågeställningar. För att den kunskapen skall spridas, krävs av oss en förmåga till *konkretion* av matematiken, som enligt min mening är mycket mer betydelsefull än den mångomtalade *motivationen*. Detta leder oss in på min andra tes, men låt mig först ta ett annat exempel på hur matematikentusiasmen är spridd enligt helt andra mönster än vad man ofta förmodar; det brukar sällan slå men jag kommer att fortsätta att pröva det.

För den som intresserar sig för litteratur och andra konstarter är det förbluffande hur många exempel på matematiskt intresse och matematisk kunskap man kan finna hos konstnärligt verk-



BI-NAL

samma jämfört med t ex intellektuella administratörer. När det gäller musik och bildande konst medför tyvärr ofta referenser till matematik schismer med den typ av humanister, som följande konventionen, fattar detta som en degradering av ädel materia.

Om vi håller oss till litteraturen, så finns det massvis med exempel, både svenska och internationella, på hur författare har en sådan inlevelse i den matematiska begreppsvärlden att de naturligt finner analogier och associationer mellan livets situationer och matematiken. Om detta kan man utan svårighet hålla flera föreläsningar, men låt mig av de internationella författarna ta Samuel Beckett, där vissa romaner är fyllda av matematiska allusioner och där personernas inbördes relationer förknippas med rationella och irrationella tal, ja t o m trianglars omskrivna cirklar (begrepp som måhända snart är okända i Sverige).

Ett svenskt exempel, som jag kanske tolkar in mer i än ni vill acceptera, är Kerstin Ekmans skildring av Ingrid Eriksons tankar som åskådare till en bandymatch:

Naturligtvis begrep hon. Ändå var det något magiskt med detta lilla knyte som plötsligt kunde bytas ut. Alltså gällde det egentligen ett antagande, en överenskommelse. Det var något blott och bart teoretiskt.

När hon tänkte så där kom den gamla lusten att räkna över henne. Hon hade en gång haft lätt för att räkna och känt glädje när hon gjorde det. Att räkna var så här: kasta in ett snörnystan och antag att!

Änglahuset, 1975

Allt jag vill säga är, att om man med intresse närmar sig grupper i samhället där det enligt konventionerna inte bör finnas något speciellt matematikintresse, det må sedan bero på deras kulturella läggning eller deras obildning, så skall man upptäcka ett intresse för problem och en känsla för matematikens innehåll, som inte står formalräknemästarnas efter. Detta får mig att tro att formeln alla människor är matematiker skulle vara användbar som ledstjärna. Då fordras det också att vi accepterar att framsteg är framsteg på alla nivåer, och ej endast skall räknas för några som vi är villiga att kalla elit.

Matematikens stora betydelse i samhället är som kulturelement

Med de krav som samhället idag ställer på sina medborgare i medverkan till beslut (t ex folkomröstningar) är det svek att inte satsa på att lära dem som först klassats som mindre lovande, något om den vetenskapliga metoden. Detta är nämligen enligt min andra tes vad matematiken handlar om.

Matematikens stora betydelse är som ett element i kulturen, den ger oss kunskap om den vetenskapliga metoden

När vi diskuterar drill, förståelse och tillämpning i matematiken, gäller det avvägningen mellan algoritmiska och icke-algoritmiska metoder. Vad jag bestämt vill hävda är att utvecklingen ej går i riktning mot ökat intresse för algoritmisk kunskap i matematiken; den går i rakt motsatt riktning! Därför kan man hävda att matematiken som övnings- och demonstrationsplats för den "vetenskapliga metodiken" inte bara *har* en viktig plats utan också *får* ökad betydelse.

Det är det som vi fuskat bort om våra elever inte har någon uppfattning om problem, lösning eller bevis. Jag hävdar att vi här har matematikens viktigaste funktion i samhället, den är synnerligen väl lämpad att sprida sådan kunskap, inte minst i en rätt bedriven geometriundervisning, som tyvärr ej givits plats i våra nuvarande kurser. Men jag lovar att det går med mängdlära också om man gör det med omsorg. Fysik är en annan möjlighet sägs det ibland, och gärna det! Nu hör jag riktigt hur vännerna av ordning både myser och fryser åt den teoretiske matematikerns drömmar. Alla vet ju att svensk ekonomi och teknisk utveckling står och faller med det uppväxande släktets räknekunnighet uppnådd genom mycken övning av rutinkaraktär!

Jag tror att den intuitiva uppfattningen att tillämpningsförmågan bäst uppnås genom hårdträning av speciella tillämpningar. Förutsättningen för tillämpningar, som ej har sådan rutinkaraktär att de ingår i algoritmiden, är en förståelse av sammanhangen, som gör det möjligt att känna igen mönstret när det uppträder i en annan skepnad, i ett annat ämne, en annan vetenskap.

Och överallt där matematiken användes, är det fråga om den vetenskapliga metoden, att organisera kända fakta, att kombinera, att kunna formulera problem. — Som vi vet kan då matematiken bli ett kommunikationsmedel som förmedlar kunskap mellan andra ämnesområden.

För varje tekniker t ex som verkligen räknar, finns det tio andra som har behov av att förstå vad räknandet innebär!

Hur kan man nu hävda att behovet av algoritm kunskap är på nedgång i vårt industrialiserade och organiserade samhälle? Ja, den naturliga brytpunkten vid denna biennial är naturligen miniräknare, som väcker en enligt min mening chockerande konservatism till livs. Det hävdas tydligen från skilda håll att multiplikationsalgoritmen skulle ha ett egenvärde, vara något som ger förståelse, i värsta fall vara ett omistligt inslag i vårt kulturarv. Jag är övertygad om att en sådan uppfattning är i det närmaste grundlös. Den som under årens lopp har umgåtts med tusentals studenter och har haft anledning att kolla deras förståelse av räkneoperationer, har mycket svårt att tänka sig något samband mellan skicklighet i genomförandet av multiplikationer och förståelse av vad som händer.

Miniräknaren och dess segertåg även inom skolan måste ses som ett led i en naturlig och ständigt fortgående process, som lett till mycket positivt: Välskrivning var en gång ett viktigt ämne och detta av helt praktiska skäl: det behövdes folk som kunde skriva vackert! Skrivmaskinens intåg och mycket annat har reducerat behovet av skönskrivare av gammalt slag. (Men inte av de estetiska effekterna av deras verksamhet.)



För inte alltför länge sedan fanns det behov av folk som hade god rutin på addition av långa sifferkolumner. Det var en naturlig uppgift för skolan att ge den rutinen. Det är det inte nu! Där emot är det av intresse att veta vad addition innebär, så att man kan känna igen när den behövs i omvärlden.



En gång i tiden var det mycket praktiskt användbart att kunna teckna. Det var den möjlighet man hade att förmedla synintryck från sina färder till de hemmavarande och det ingick i bildningen. Nu finns det andra möjligheter som befriat oss obegåvade från kravet att sträva med sådant. Det finns ju kameror, men naturligtvis finns uppskattningen av konstnärliga prestationer kvar!



Nu är det dags för multiplikationen och flera andra räknesätt att gå samma väg som additionen och detta borde vi kunna acceptera på ett avspänt sätt och utan att glömma alla historiska paralleller av vilka jag nämnt några.

Visst, säger ni, men allt detta betyder inte att algoritmerna försvinner, bara att de ersätts med nya. Nu skall vi lära oss att trycka på knappar och tangenter både här och där! Det är naturligtvis riktigt men de nya hjälpmedlens segertåg baseras ju på att det är enklare att lära sig att utföra $24 \cdot 37$ på en miniräknare än med den klassiska algoritmen. Den friställda tiden vill jag och

många andra nyttja för att öka förståelsen och kännedomen om den vetenskapliga metoden!

Detta är den svåra biten i all undervisning. Jämfört med sådant är algoritmdressyr lätt! Och som vi ser, algoritmkunskap föräldras betydligt snabbare än förståelse.

Låt mig skjuta in att bland alla dessa människor som egentligen är matematiker, finns det en del som har sin positiva matematikupplevelse lättast i utförandet av en algoritm (som ger ett svar som stämmer med facit). Det är en ordningens tillfredsställelse som påminner om de lustupplevelser som *kan* finnas i städning och disk (detta bör förstås vi män verkligen aktivt undersöka, mer aktivt än statistiken visar). Det är för mig självklart, att sådana positiva algoritmutupplevelser skall utnyttjas i undervisningen, men skall de då inte också kombineras med ett litet, litet lätt tryck i förståelseriktning; kanske det är en inkörsport?

Jag har vid flera tillfällen nämnt min entusiasm för att man skall tala: det skrivs för mycket, det räknas för mycket och det talas (och möjligen sjungs) för litet, i synnerhet om matematik.

I den andan har jag verkligen talat under denna allmänna rubrik och jag har gjort det i anslutning till två teser, som ingen kan begära att ni helhjärtat skall svälja, nämligen Alla människor är egentligen matematiker och Matematikens betydelse för samhället består inte i att folk räknar.

Vad har nu detta spekulerande med det dagliga arbetet i skolan att göra?

Svaret är naturligtvis: *just ingenting* eller också: *på lång sikt, allt*.

Försöken att genom mer eller mindre sofistikerade enkäter fastlägga mer exakt vad morgondagens yrkesliv kräver är döds-



dömda därför att de är principiellt omöjliga. Ju längre ned vi går i skolan, ju evigare bör de meddelade kunskaperna vara?

Dessutom finns det ett så skrämmande inslag av tro på likformighet i profilen av alla yrkesutövare. Bör vi inte lära oss att ett modernt yrkesliv utförs av jämställda medarbetare men med olika kunskaper och färdigheter?

För att tillämpa detta på skolan och de många professorernas odisputabla observation att svensk vetenskap i många ämnen är på väg att försvinna, sedan forskandets merit- och befordringsvärde inom skolan radikalt ändrats! Jag tror att samhället har anledning att observera detta och göra något åt det, men jag vill inte för min del hävda att det är det vägande skälet, varför det bör finnas en matematiker med erfarenhet av forskning och med god ämneskunskap i varje distrikt eller på varje större skola. Skälet är i stället detta som jag inledningsvis sade, att det i det samarbete som jag förutsätter finns mellan lärare av olika slag också bör finnas någon som naturligt företräder ämnesmässiga synpunkter. Så att man åtminstone vet vad man förlorar när man bestämmer sig för att förlora något!

Misstolka nu inte detta som en förkunnelse att en god lärare skall och måste vara övermeriterad vetenskapligt. Det har jag inte sagt och jag tycker det skulle vara lika dumt, som den tes jag ibland möter, att vi skulle ha matematiklärare som har riktigt svårt för matematik, ty vem annars skulle förstå elevernas svårigheter. Den tesen innehåller så många logiska kullerbyttor att jag föreslår vi spar diskussionen till våra fortsatta samtal om matematik.

Jag har de största förhoppningar om att detta kommer att roa oss och att den matematik som småningom blir utformad efter påverkan genom våra resonemang blir uppskattad av många av alla dessa människor som egentligen är matematiker! Det är alltså så att matematik är roligt dvs ett glädjeämne. Roligt i sig själv och inte genom att man hänger en apa i änden på kurvan i koordinatsystemet eller gör några andra ytliga associationer. Att matematiken är rolig i sig själv beror på något annat och låt mig citera en favoritförfattare irländaren J L Synge:

He was merely telling the truth and that I always find vastly entertaining!

Sanningen, rätt berättad, är underhållande. Och kommer vi i gång med den typen av underhållning så kommer både vi och våra elever att få uppleva ytterligare en effekt som inte är dålig och som uttrycks sålunda av en annan och mer berömd irländare, Samuel Beckett:

Extraordinary how mathematics help you to understand yourself!

Med hänsyn till det rika inre liv som säkerligen varje biennaldeltagare har, kommer denna upplevelse att bli ännu ett glädjeämne!