

TIMSS 2007 – En djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper

Detta är den första i en serie artiklar där de svenska resultaten från TIMSS 2007 diskuteras. Analysen av elevernas lösningar visar att många fel på uppgifterna i aritmetik uppstår då elever använder beräkningsstrategier i fel sammanhang.

I bland när resultatet av TIMSS diskuteras kan man få höra att svenska elever inte är så bra i matematik. Detta är förvisso sant men skvallrar om ett snävt fokus. TIMSS-projektet är ju inte en utvärdering bara av elevers matematiska kunskaper utan en utvärdering av hela skolsystemets förutsättningar. Det omfattar inte bara testuppgifter till eleverna utan också enkäter till elever, lärare och skolledare. Även en nationell enkät, vilken Skolverket besvarar, finns med. Detta omfattande grepp syftar till att ge möjlighet att undersöka vilka faktorer som påverkar elevernas prestationer positivt.

I TIMSS 2007 deltog elever från årskurs 4 och 8. Resultatet för de svenska eleverna i både årskurs 4 och 8 var under genomsnittet för EU/OECD-länderna. Elever i årskurs 4 deltog för första gången, medan årskurs 8 har deltagit 1995 och 2003. I deras fall var det därför möjligt att se vilken trend utvecklingen av matematikkunskaper har. Utvecklingstendensen i årskurs 8 var att den försämring som skedde mellan 1995 och 2003 har fortsatt.

Projektet har en så kallad *rotationsdesign*, vilket innebär att flera olika test används. Varje elev gör ett testhäfte med två av de totalt 14 olika testen. På detta sätt ökar tillförlitligheten i testen då många uppgifter används. En dåligt konstruerad uppgift får inte samma genomslag i en grupp på 200 testuppgifter som i en på 20. Enligt en studie, som Skolverket gjort, ansluter uppgifterna huvudsakligen till de mål som anges i den svenska kursplanen. Några uppgifter ligger utanför dessa, speciellt i algebra för årskurs 8.

Olika matematiska områden testas, i årskurs 4 taluppfattning och aritmetik, geometri och statistik och i årskurs 8 tillkommer algebra. Resultatet i årskurs 4 är under genomsnittet i taluppfattning och aritmetik samt geometri. I årskurs 8 är resultatet under snittet i geometri och algebra. Mot denna bakgrund har jag gjort en djupanalys av den kunskapsbild som ligger bakom resultaten på dessa områden. Denna analys omfattar inte bara analys av ca 10 000 elevlösningar och svar utan också 300 djupintervjuer av elever i Lilla Edets kommun samt analys av ca 3000 elevlösningar av nationella ämnesprovet i årskurs 5. En sådan bred analysansats gör slutsatserna rörande TIMSS-resultaten betydligt säkrare.

En ny kunskapsbild

Den bild som framträder är till stora delar en annan än vad vi tidigare föreställt oss. Slumpmässiga eller andra enkla räknepel är knappast något inslag i bilden. Inte heller tycks avsaknad av traditionella förkunskaper vara problemet. Bilden är snarare att eleverna kan flera olika beräkningsstrategier eller "tankeled" men de vet inte i vilket sammanhang de skall tillämpas. Felaktig tillämpning av beräkningsstrategier kan på ett avgörande sätt hindra elevernas utveckling av talbegreppet och påtagligt försämra deras möjligheter att tillgodogöra sig undervisningen. Ett andra inslag i denna bild är att subtraktiva och multiplikativa jämförelsesituationer i benämnda problem är svåra att identifiera. Även de svenska elevernas begreppsuppfattningar spelar stor roll för resultat. Elever kan ha flera parallella uppfattningar om ett och samma begrepp varav någon eller ingen är tillräckligt utvecklad för att vissa typer av uppgifter skall kunna lösas. En annan relativt stor stötesten är den procedurinriktade kunskapen i geometri. Speciellt tydligt är detta för areabegreppet. Sammanfattningsvis kan sägas att svenska elever har en hel del kunskaper men att dessa måste bekräftas och utvecklas ytterligare (Bentley, 2008b).

I en serie artiklar kommer denna kunskapsbild att beskrivas område för område. Det första området omfattar taluppfattning och aritmetik. Inledningsvis behandlas beräkningsstrategierna, deras tillämpning i olika sammanhang samt deras begreppsliga förankring. För att göra detta måste vi först se vilka förutsättningar för lärande vårt arbetsminne ger.

Arbetsminnet och talfakta

Vårt arbetsminne, som brukar indelas i tre funktionella delar, den *exekutiva funktionen*, den *fonologiska loopen* samt den *visuellt spatiala funktionen*, kan sägas vara ett nålsöga vid inläring. Vi kan under mycket begränsad tid hålla vissa element aktuella i minnet men tappar dessa relativt snabbt. Det är bland annat denna mekanism som sätter en gräns för de operationer vi kan utföra. Om däremot den exekutiva funktionen kan hämta resultatet av aritmetiska beräkningar från långtidsminnet, vilket sker förhållandevis snabbt, så kan mer komplexa beräkningar utföras. Denna färdighet benämns också att eleven har *talfakta*. Den exekutiva funktionen, som samordnar de övrigas aktiviteter, svarar också för vart uppmärksamheten riktas. Om arbetsminnet är fullt sysselsatt med en beräkning så kan inte uppmärksamheten riktas mot annat än själva beräkningen. Om principen för beräkning av arean av en triangel behandlas i undervisningen så måste de elever som inte utvecklat talfakta rikta sin uppmärksamhet mot själva beräkningen och inte mot principen för hur beräkningen går till (DeStefano & LeFevre, 2004). De flesta kanske tror att alla elever åtminstone i senare delen av grundskolan har utvecklat talfakta men så är inte alls fallet visar analysen av TIMSS 2007.

Vad är det då som påverkar utvecklingen av talfakta? Felaktig tillämpning av beräkningsstrategierna hindrar denna utveckling. Om exempelvis $9 + 7$ ibland blir 16, ibland 17 eller 15 så finns inget entydigt resultat att lagra i långtidsminnet. Beräkningsstrategierna måste leda till korrekta resultat för att talfakta skall kunna utvecklas (Siegler, 1995; Bentley, 2008a).

Beräkningsstrategier

Beräkningsstrategierna spelar alltså en avgörande roll då eleverna skall utveckla talfakta. Speciellt är vissa strategier särskilt utsatta och leder mer frekvent till misstag. Nedan beskriver jag de vanligaste, mest använda strategierna. Då det saknas en etablerad svensk terminologi anges även de engelska. Observera att beskrivningarna är hämtade från svenska läroböcker.

Stegvis beräkning

I huvudräkningsproceduren *stegvis beräkning* (the jumping strategy) sker beräkningen genom steg eller hopp, entalsvis och tiotalvis.

$$\text{Exempel: } 37 + 16 = [37 \xrightarrow{3} 40; 40 \xrightarrow{13} 53] = 53$$

Genom att hoppa till närmsta tiotal kan beräkningarna underlättas. Stegvis beräkning kan även användas på subtraktioner, men de omvandlas då först till motsvarande additioner.

$$\text{Exempel: } 37 - 16 = [16 \xrightarrow{4} 20; 20 \xrightarrow{10} 30; 30 \xrightarrow{7} 37; 4 + 10 + 7] = 21$$

Kompensationsberäkning

Den grundläggande idén bakom den andra huvudräkningsproceduren *kompensationsberäkning* (the compensating strategy) är att jämna av det första talet till närmsta tiotal.

$$\text{Exempel: } 37 + 16 = [37 + 3 = 40; 40 + 16 = 56; 56 - 3] = 53$$

I slutet kompenseras för utjämningen genom att talet tre subtraheras från resultatet (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Transformationsberäkning

Strategin *transformationsberäkning* (the transformation strategy) finns i två olika versioner, en för addition och en för subtraktion. I den första versionen adderas ett lämpligt tal till den första termen och samma tal subtraheras från den andra termen (Seyler, Kirk & Ashcraft, 2003). Syftet, förutom att förenkla beräkningen, är att inte förändra värdet. Differensen bibehålls genom att man först adderar 3 och sedan subtraherar 3. Även den omvända strategin är möjlig, att först subtrahera ett tal och sedan addera samma tal.

$$\text{Exempel, addition: } 37 + 16 = [(37 + 3) + (16 - 3) = 40 + 13] = 53$$

Samma tal antingen adderas eller subtraheras till båda termerna i en subtraktion.

$$\begin{aligned} \text{Exempel, subtraktion:} \\ 64 - 27 &= [(64 - 4) - (27 - 4) = (60 - 20) - (23 - 20) = 40 - 3] = 37 \end{aligned}$$

Den begreppsliga förankringen är troligen lättast att förstå i det fall då subtraktionen betraktas som en jämförelse av två tal. Skillnaden mellan dem förändras inte då 4 subtraheras från båda talen.

Talsortsvis beräkning

I *talsortsvis beräkning* (the splitting strategy) beräknas tiotal för sig och ental för sig. Därefter kombineras delresultaten. Algoritmen finns i två versioner, dels en avsedd för addition och subtraktion utan växling, dels en för subtraktion, som kräver växling (Thompson, 1999; Klein & Beishuizen, 1998).

$$\text{Exempel: } 67 - 24 = [60 - 20 = 40; 7 - 4 = 3; 40 \overset{\uparrow}{+} 3] = 43$$

I den första versionen adderas de partiella resultaten, som pilen visar. I den andra versionen nedan däremot subtraheras de partiella resultaten. Det beror på det negativa resultatet vid subtraktionen av entalen.

$$\text{Exempel: } 64 - 27 = [60 - 20 = 40; 4 - 7 = -3; 40 \overset{\uparrow}{-} 3] = 37$$

Mixad beräkning

I *mixad beräkning* (the mixed strategy) kombineras talsortsvis beräkning och kompensationsberäkning (Fuson m fl, 1997).

$$\text{Exempel: } 64 - 27 = [60 - 20 = 40; 40 - 7 = 33; 33 + 4] = 37$$

Denna strategi löser elegant problemen, som lätt uppstår vid talsortsvis beräkning. Här hanteras subtraktion med eller utan växling med hjälp av en och samma version.

Foxman och Beishuizen (2002) undersökte bland annat lösningsfrekvenserna för de olika strategierna. De fann att högst lösningsfrekvens hade *kompensationsberäkning* (79%) medan *talsortsvis beräkning* hade betydligt lägre lösningsfrekvens (33%). Den vanliga *standardalgoritmen* hade i deras studie nästan samma lösningsfrekvens (75%) som kompensationsberäkning. Ett högfrekvent misstag, som elever i deras studie gjorde, var att talsortsvis beräkning för subtraktion *utan* växling tillämpades på subtraktioner som krävde växling. Exempelvis blev $51 - 49 = 18$. Eleverna verkade tillämpa beräkningsstrategierna mer eller mindre mekaniskt då de inte reagerade på att 49 och 51 ligger så pass nära att resultatet inte kan bli 18.

Analys av tillämpningen av elevers beräkningsstrategier

Hur kan då elever ha resonerat? I rutan på nästa sida finns några exempel från elevintervjuerna. Eftersom man som lärare inte rimligen kan hinna intervjua enskilda elever om hur de tänker eller resonerar så har elevernas förklaringar utelämnats. Frågan är alltså hur eleven kan ha tänkt. Vilka beräkningsstrategier har tillämpats i fel sammanhang?

En elev får $64 - 47$ till 23. Hur kan eleven ha tänkt?

Några elevexempel för läsaren att fundera på till nästa nummer av Nämnaren.

Problem 1

Kalle får $23 - 17$ till 0.

Problem 2

Ulla beräknar $37 + 22$ till 41.

Problem 3

När Oskar lägger ihop 32 och 26 får han 54.

Problem 4

Lisa, som gick i andra klass, löste ett antal uppgifter och fick följande svar: $7 + 5 = 13$, $12 + 4 = 16$, $9 + 2 = 12$ och $4 + 5 = 9$.

I det här fallet tillämpar eleven den version av talsortssvis beräkning som är avsedd för subtraktioner utan växling på denna som kräver växling. Det blir

$$64 - 47 = [60 - 40 = 20; 7 - 4 = 3; 20 + 3] = 23$$

Observera att subtraktionen av entalen är omkastad. Ibland är den inte det heller, utan $4 - 7 = 3$ ändå.

Elever kan ibland ge underliga svar på beräkningar. Problem 4 beskriver en situation som tyvärr inte visat sig vara lågfrekvent. En ytlig förklaring skulle kunna vara

att Lisa inte övat additioner tillräckligt. En sådan analys saknar emellertid precision. Vad kan ha varit Lisas verkliga problem? Som ledtråd kan sägas att det inte är en tillämpning av en beräkningsstrategi i fel sammanhang som orsakar problemet utan ett mer grundläggande förhållande. Detta kommer utförligt att behandlas i nästa nummer av Nämnaren.

LITTERATUR

- Bentley, P.-O. (2008a). *Pupils' arithmetic knowledge and the procedural models in their teaching*. Manuskript inskickat för publicering.
- Bentley, P.-O. (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer* (Analysrapport till 323). Stockholm: Skolverket.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- DeStefano, D. & LeFevre, J.-A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*, 16 (3), 353–386.
- Foxman, D. & Beishuizen, M., (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: a reanalysis of data from the 1987 APU survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 41–69.
- Fuson, K., C., Wearne, D., Hiebert, J., C., Murray, H., G., Human, P., G., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structure for multi-digit numbers and methods of multi-digit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130–162.
- Klein, A., S. & Beishuizen, M. (1998). The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443–464.
- Seyler, D., J., Kirk, E., P. & Ashcraft, M., H. (2003). Elementary subtraction. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 29 (6), 1339–1352.
- Siegler, R., S. (1995). How does changes occur: a micro-genetic study of number conservation. *Cognitive Psychology*, 28, 255–273.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction, part 1. *Mathematics in School*, November, 2–4.
- Fler referenser finns på Nämnaren på nätet, ncm.gu.se/namnaren