

# Fängslande om matematikundervisning

Vad kan vi lära av forskning och utvecklingsarbete i andra länder? Här beskrivs en ny bok av internationellt kända matematikdidaktiker som tar upp forskningsanknutna frågor med förslag på undervisningssekvenser. Boken är tänkt att användas för kompetensutveckling, tillsammans med kolleger eller enskilt.

**L**ära och undervisa matematik – internationella perspektiv är ett av resultaten av många års kontakter mellan företrädare för NCM och Nämnaren och matematikmiljöer i olika länder. Tankarna på projektet som nu resulterat i två böcker, en på engelska och en på svenska, tog form för fem år sedan och arbetet beskrivs kortfattat i slutet av artikeln.

För att ge inspiration till utveckling av svensk matematikundervisning har vi bett om artiklar från internationellt kända matematikdidaktiker som har besökt Sverige under kortare eller längre tid. Här har de tagit del av svenskt utvecklingsarbete, mött lärare och lärarutbildare och haft seminarier kring sina specialiteter. Vi beställde bidrag inom områden som låg nära det uppdrag Matematikdelegationen fick 2003 och de rapporter NCM tog fram 2001. Artiklarna skulle inte enbart ha teoretisk inriktning, utan närliggande klassrumsaktiviteter skulle beskrivas, forskning och utvecklingsarbete göras levande och möjligt att omsätta. Först kom en bok på engelska 2004 och i augusti 2006 en på svenska, med ungefär hälften av artiklarna ur den engelska boken översatta och bearbetade. De översatta artiklarna är valda bl.a. med tanke på förslagen i matematikdelegationens betänkande (SOU 2004:97). I slutet av boken publiceras sammanfattningar, abstracts, för de artiklar som inte är översatta. Boken ger fängslande och inspirerande inblickar i utvecklingsprojekt i olika länder. Gemensamt för alla bidrag är de stora förväntningarna på barns och elevers förmåga och den tydliga optimismen inför möjligheterna till rikare upplevelser av och bättre kunnskap i matematik genom bättre undervisning.



## Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv

Det finns olika sätt att gruppera bokens artiklar med tanke på läsarens intresse. Den här korta genomgången följer i stort bokens disposition och lyfter fram några områden som vi tycker är väsentliga att reflektera över och att utveckla.

### *Tal och räkning*

De tre första artiklarna i boken tar upp tal och räkning. Intressanta och elevnära frågeställningar från erfarenheter av undervisningen kring standardalgoritmer tas upp utifrån genomförda forsknings- och utvecklingsprojekt i Australien. Alistair McIntosh visar på värdet av och strategier i huvudräkning och informella skriftliga metoder samt ger exempel på klassrumsaktiviteter. Doug Clarke belyser vikten av begreppsutveckling och tankeformer utifrån en studie med 36 000 barn i åldrarna 5–9 år och Max Stephens visar hur vi kan arbeta med algebraiskt tänkande i åldrarna 6–12 år, genom att vila på aritmetikens inneboende algebraiska struktur. I text och exempel visas hur barns erfarenheter av talmönster och talrelationer kan ge känsla och förståelse för algebraiska uttryck och likheter.

### *Geometrikunnande*

Geometri är ett område som behandlats styvmoderligt både internationellt och i svensk skola. Resultat på nationella och internationella utvärderingar tyder på detta. I boken berättar Erich Wittman, Tyskland, om hur han undersökt barns kunskaper i relation till sju grundläggande idéer i elementär geometri. En studie med sexåringar redovisas och exempel på konkreta aktiviteter och spel för tidiga år finns, att pröva med egna elever.

Graham Littler, England, och Darina Jirotkova, Tjeckien, tar upp hur barns tänkande och språk om geometriska kroppar relateras till känsel och syn. Likheter och skillnader mellan rymdgeometriska objekt som pyramid, klot, kub m fl diskuteras i olika konkreta aktiviteter där elever använder känsel och språk för att karakterisera

objekten och kommunicera kring rumsliga begrepp. Darina Jirotkova visar i en annan artikel hur man med en serie experiment på rutnätspapper kan göra geometriska upptäckter och ta fram samband mellan koordinater och algebraiska uttryck, bl a pythagoreiska taltripplar. De flesta exempel i den artikeln är tänkta för senare år i grundskolan eller början av gymnasiet, men det finns också aktiviteter för yngre elever.

### *Modellering och problemlösning*

Matematiska modeller är ett annat område som svenska kursplaner betonar, men som haft en undanskymd plats i undervisningen. Morten Blomhøj, Danmark, visar hur man kan sätta fokus på relationer mellan verklighet och matematik både i teori och praktik. Ett exempel tar upp en elev som tyckte matematik var svårt och tråkigt och fick i uppgift att ta reda på hur mycket vatten som gick åt till morgonduschen. Utifrån egna undersökningar och diskussioner med läraren ställde eleven upp en funktion och ritade en graf som gav vattenmängden som funktion av tiden. Arbetet skedde inom projektet "Matematiska morgnar", som genomfördes med 48 elever. Utfallet av projektet var mycket gott med stort engagemang och mycket aktiva elever.

Undervisning i problemlösning belyses i flera artiklar, mest renodlat av flitiga Sverigegästerna Frank Lester och Diana Lambdin, USA, samt av ett författarteam från Shell Center i England lett av Alan Bell. Den förra artikeln tar upp undervisning *genom* problemlösning, dvs hur elever kan nå förståelse för begrepp genom att arbeta med välvalda problem. Artikeln av teamet från England tar upp forskning kring elevers lärande av bevis- och problemlösningsprocesser och ger en mängd klassrumsaktiviteter för elever i åldrarna 10–15 år.

Många har väl trott att det som främst ger skillnader mellan pojkars och flickors resultat vid problemlösning är det problemen handlar om, kontexten. Marja van den Heuvel-Panhuizen, Nederländerna, redovisar dock en intressant studie med 12-åringar, och visar med ett antal exempel att problemens matematiska natur är viktigare. Det finns flickproblem och pojckproblem.

## Motiv för matematik

Ett engagerat och spännande bidrag ger Victor Firsov, Ryssland. Han menar att det måste vara tillåtet att tycka illa om eller till och med hata matematik och få undervisning som leder till baskunnande som svarar mot obligatoriska krav. Elever i olika åldrar har enligt författaren olika motiv för att lära sig och om vi inte kan väcka eller utveckla elevens intresse måste vi ändå erbjuda eleven möjlighet att lära sig och eleven ska ha rätt att välja hur långt utöver den obligatoriska nivån han/hon vill gå.

Paul Ernest, England, tar upp vad det innebär att kunna matematik. Han skiljer mellan relevans och nytta och pekar på vikten av att undervisningen tar upp sådana exempel på matematikens kraft som gör att eleverna kan uppskatta och värdesätta matematik, då detta liksom kunskaper och färdigheter i ämnet är viktiga mål för undervisningen. Aktiviteter att pröva med eleverna ingår, som i alla bidrag, och det ena exemplet behandlar USA:s kostnader för Irak-kriget.

Stephen Lerman, England, diskuterar förklaringar till vissa elevers misslyckande med skolmatematik. Han utgår från att det som sker i klassrummet, både innehåll och undervisning, baseras på val. Dessa val styrs av skilda värderingar. För att förstå hur de sociala krafterna påverkar elevernas lärande behöver vi bli medvetna om underliggande värderingar och förväntningar. De exempel han presenterar har avsikten att göra oss medvetna om vad vi förväntar oss av eleverna och huruvida eleverna vet det.

Barbara Clarke och Rhonda Faragher visar forskningsresultat från *Early Numeracy Research Project* i Australien (ett projekt som också Doug Clarkes artikel behandlar). De belyser betydelsen av lärares förväntningar på barn med mycket stora svårigheter. Projektets påverkan på elever och lärare ledde till dramatiskt förbättrade resultat när det gällde att utveckla matematiskt tänkande hos eleverna och tydligt ökade förväntningar hos lärarna. I bidraget visas exempel från den diagnostiska intervju som gjordes när barnen i projektet började skolan. Denna intervju gjordes med alla elever och visade sig vara mycket värdefull.

Vad ger det för motivation och effekt att placera matematiken i samhället? Vena Long, USA, resonerar kring lokal- eller

platsbaserad matematik och ger i ett antal exempel autentiska "existensbevis" för att elevers projektarbete i grund- och gymnasieskola på häpnadsväckande sätt påverkat lokalsamhällen både ekonomiskt och socialt. Elevernas intresse för matematik och engagemang i arbetet var stort. I artikeln formuleras några olika förutsättningar för denna form av matematikarbete.

## Hur blir vi bättre på att undervisa i matematik?

Otto Bekken och Reidar Mosvold, Norge, diskuterar en problemuppgift ur ett historiskt-genetiskt perspektiv och argumenterar för det historiska perspektivet. Problemuppgiften som diskuteras är hämtat från TIMSS videostudie, där en japansk åttondeklass arbetar med just detta problem. Klassrumsstudier vid internationella undersökningar har diskuterats mycket de senaste åren. För att bygga professionellt kunnande i matematikundervisning har man i USA gått vidare med *Lesson studies* efter japansk modell (ett antal artiklar om sådana har publicerats i *Nämnan*). Författarna menar att det vore värt att pröva sådana i skandinavisk miljö, med stöd av ett videoarkiv.

Maria Luiza Cestari, Rosella Santagata och Gail Hood beskriver en pilotstudie där amerikanska lärare deltog i en internetbaserad algebrakurs. Lärarnas lektioner och reflektioner kring denna diskuteras och författarna resonerar kring möjligheter med att använda videospelningar som ett led i kompetensutveckling.

Ingvill Stedøy rapporterar från en norsk studie där syftet var att undersöka och utveckla metoder att öka lärares kompetens. I studien deltog två utvalda lärare. Lärarna förändrade inte bara sin egen undervisning med stöd av handledare, de spred också idéer och tankar om den egna förändringen till andra lärare och skolor. Med erfarenhet från denna studie har ett större utvecklingsprojekt startats. Det bygger på en grupp utvalda resurslärare från olika delar av landet och från olika stadier i skolsystemet. Dessa utbildas gemensamt och arbetar därefter med skolor och lärare. Intressanta kopplingar finns här till de matematikutvecklare som kommunerna har utsett eller ska utse.

I bokens sista bidrag visar Thomas Cooney, USA, på betydelsen av ett mångfasetterat förhållningssätt till matematikundervisning. Han argumenterar för att vi ska värdesätta olika undervisningsstilar där lärare använder öppna frågor och arbetar med inriktning på elevers tänkande. Den blivande läraren måste därför under sin utbildning möta en variation av aktiviteter i kombination med betoning på ett reflekterande tankesätt.

## Varför och hur har böckerna kommit till?

Synen på lärande och undervisning i matematik har ändrats ganska mycket de senaste 30 åren, i Sverige och i de flesta andra länder. Forskning och utvecklingsarbeten lyfter fram att barn och elever ska utmanas att upptäcka, konstruera, verifiera och diskutera idéer och slutsatser. Lärarrollen blir då mer komplex och krävande. Beskrivningar och diskussioner kring hur detta ska realiseras har presenterats i tex Nämnares, på biennaler och biennetter. Intresset för förnyelse bland lärare i matematik verkar stort, kanske är det tom större än inom andra ämnesområden. De som har ansvar för att ge utrymme och resurser för kompetensutveckling och utvecklingsarbete inom stat och kommun har inte hängt med, men det kanske kan ändras genom förslagen i Matematikdelegationens betänkande. En vanlig fråga som ofta kommer upp när matematikundervisning diskuteras är: Hur ser undervisningen ut i andra länder?

Bengt Johansson tog i mitten av 1980-talet initiativ till en internationell seminarierie med ansedda forskare och matematikdidaktiker från olika länder. Seminarierna blev mycket uppskattade och ledde till ökade internationella kontakter och fördjupat kunnande hos deltagarna, som kom från hela Norden. Under åren lämnade ett stort antal internationella gäster, på seminarier och i dokumentation av dessa, bidrag till utvecklingen av svensk matematikundervisning. Med tiden kom tanken på att ordna en konferens med dessa kolleger och bygga den kring bidrag inom specifika områden. Konferensen ägde rum sommaren 2003. De övergripande frågorna till deltagarna var:

- Vad säger internationell forskning om lärande och undervisning i matematik?
- Hur får vi största möjliga intresse för matematik?
- Vilka resultat från internationell forskning är särskilt viktiga för klassrumsarbetet?

Konferensens teman är närmare beskrivna i kapitlet "International Perspectives" i den engelska boken *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, som kom ut sommaren 2004. Arbetsgången med den boken beskrivs i bokens "Preface". Den internationella redaktionens "Introduction" ger några nedslag i och motiv för internationellt samarbete och beskriver den engelska bokens 39 bidrag, som är fördelade på 7 områden. (Clarke mfl, 2004).

Efter att den drygt sexhundra sidiga boken på engelska kommit ut vidtog processen att ta fram den svenska boken som vi presenterat här. Arbetet med de båda böckerna har varit omfattande och inbegripit en betydande kompetensutveckling för alla som deltagit, inte minst för oss inom NCM. Vi tror att det kan vara intressant för Nämnares läsare att också ta del av den kompetensutveckling som det innebär att studera och använda bokens innehåll. Bidragen innehåller teori att fundera över och diskutera. Det finns gott om klassrumsaktiviteter att analysera, pröva med elever och därefter diskutera tillsammans med kollegor. Vi hoppas att de användbara och intressanta bidragen också ska ge upphov till nya tankar, idéer och klassrumsaktiviteter.

## LITTERATUR

- Boesen, J., Emanuelsson, G., Johansson, B., Wallby, A. & Wallby, K. (2006). Inspiration för svensk matematikundervisning. I J. Boesen, mfl (red). *Lärande och undervisning i matematik. Internationella perspektiv*. NCM, Göteborgs universitet.
- Clarke, B., Clarke, D., Lambdin, D., Lester, F., Emanuelsson, G., Johansson, B., Wallby, A., & Wallby, K. (red) (2004). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. NCM, Göteborgs Universitet.
- SOU2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*. Stockholm: Fritzes.