Kajsa Bråting & Lars Madej

Generaliserad aritmetik

– en bro mellan aritmetik och algebra

Svenska elever har haft svårt för algebra både ur ett historiskt och ett internationellt perspektiv. I projektet som beskrivs i artikeln utgår författarna från internationell forskning för att hitta utbildningstraditioner som karakteriserar den svenska skolalgebran. Ekvationer, funktioner, samband och förändring är delar av algebra som förekommer i hög grad i svenska kursplaner och läroböcker. Däremot är generaliserad aritmetik starkt underrepresenterat.

Goda kunskaper i algebra är en viktig förutsättning för att klara matematiken på gymnasiet och universitetet. Flera studier visar att många nybörjarstudenter får problem med universitetsmatematiken på grund av bristande grundkunskaper i just algebra. Traditionellt sett har algebra introducerats relativt sent i grundskolan eftersom man ansett att elever i yngre åldrar inte är tillräckligt mogna för att ta till sig algebra. Men under senare tid har matematikdidaktisk forskning visat att man med fördel kan börja undervisa algebra redan i de tidigare skolåren. Detta har lett till att många länder, däribland Sverige, har ändrat sina kursplaner och börjat integrera algebran i skolmatematiken redan på ett tidigt stadium. Forskning visar dock att det är svårt att implementera nya sätt att undervisa om man inte beaktar den rådande undervisningskulturen.

I Sverige har algebra under längre tid varit en del av skolmatematiken som elever haft stora svårigheter med. I internationella mätningar som exempelvis TIMSS och PISA har svenska elevers resultat i algebra legat under det internationella genomsnittet ända sedan början av 1960-talet. Även i TIMSS-test från 1995, då Sverige presterade som allra bäst, låg resultatet i algebra under det internationella genomsnittet. I TIMSS-tester från 2007 och 2011, då svenska elevers resultat i matematik försämrades kraftigt, var algebra och geometri de områden som drog ned resultatet allra mest. I den senaste TIMSS-mätningen 2015 förbättrades de svenska elevernas resultat jämfört med 2007 och 2011 men det ligger alltjämt under det internationella genomsnittet. Fortfarande är det innehållsområdena algebra och geometri där svenska elever presterar sämst.

Hur kommer det sig att svenska elever har svårt för algebra? Den frågan ligger till grund för forskningsprojektet *Mot en forskningsbaserad undervisning i algebra – diakrona och synkrona analyser av styrdokument, läromedel och lärares interaktion med dem* som startades 2016 under ledning av professor Kirsti Hemmi, Åbo Akademi och Uppsala universitet. Projektets övergripande syfte är att bidra till den internationella forskningsdebatten kring problematiken med att implementera algebra i skolmatematiken genom

Detta fyraåriga projekt finansieras av Vetenskapsrådet. Deltagare är Kajsa Bråting, Lars Madej och Johan Prytz, Uppsala universitet samt Yvonne Liljekvist, Karlstads universitet och Johanna Pejlare, Göteborgs universitet.

att undersöka det svenska fallet utifrån olika perspektiv. Mer specifikt handlar projektet om att hitta möjliga orsaker till misslyckandet med att höja kvaliteten i den svenska algebraundervisningen genom att undersöka hur algebra traditionellt har behandlats i svenska läroplaner och läroböcker för årskurs 1 till 9 (ett diakront perspektiv). I projektet undersöks också dagens situation (ett synkront perspektiv) genom att analysera hur algebran behandlas i aktuella styrdokument och läroböcker samt genom att intervjua aktiva lärare. Vi presenterar nu ett av de första resultaten i projektet där vi undersökt läroplaner och läroböcker för att ta reda på vilken sorts algebra som karakteriserar den svenska skolalgebran och börjar med att ge en kort översikt över de senaste årens internationella forskning om lärande i algebra.

Den internationella forskningen i algebradidaktik

Inom det matematikdidaktiska forskningsfältet finns en speciell gren som behandlar lärande i algebra. I Sverige brukar man kalla den forskningen för algebradidaktik medan en vanlig internationell beteckning är ”algebraic thinking and learning”. Under de senaste decennierna har ett omdebatterat ämne inom algebradidaktiken varit när algebran ska introduceras i skolan och vilken svårighetsgrad den bör ha. Forskare som exempelvis Victor Katz och Bill Barton menar att begreppsutvecklingen inom algebra hos enskilda individer avspeglas i den historiska utvecklingen. Detta synsätt brukar kallas rekapitulering och medför bland annat att i enskilda individers begreppsutveckling föregår alltid aritmetik och retorisk algebra den ”riktiga” algebran. Enligt den teorin bör man inte syssla med algebra i tidiga grundskolan utan lära sig aritmetiken ordentligt först. Andra forskare menar att elever inte har de kognitiva förutsättningar som behövs för att ta till sig algebra förrän i de tidigare tonåren. Dessa båda synsätt har kritiserats starkt av flera forskare, som exempelvis David Carraher och hans kollegor, vilka framhåller att algebra bör introduceras redan i de tidiga skolåren. De senare menar att kopplingen mellan aritmetik och algebra är dubbelriktad och att aritmetik kan ses som ett specialfall av algebra.

”
… aritmetik kan ses som ett specialfall av algebra

Som vi nämnde har traditionen i många länder varit att vänta med att introducera algebra till de senare skolåren men detta håller på att förändras. Flera länder har under de senaste åren genomfört ändringar i kursplanerna i matematik och implementerat algebra redan i de tidigare skolåren. Inom algebradidaktiken har en uppsjö av studier under de senaste åren påvisat fördelarna med att börja lära sig algebra tidigt. Exempelvis har Maria Blanton, en framstående amerikansk forskare i algebradidaktik, lett en stor longitudinell studie där de undersökt konsekvenserna av att introducera algebra i de tidiga skolåren. Det handlade om att under ett år mäta effekterna av att införa en speciellt anpassad algebra för elever i årskurs 3 i ett antal skolor i USA och jämföra resultatet med skolor där de följt den traditionella matematikundervisningen. Resultatet visade att de elever som följt den nya anpassade algebraundervisningen var bättre på att lösa algebraiska problem jämfört med de elever som följt den traditionella undervisningen. Exempelvis var försöksgruppen bättre på att använda likhetstecknet på rätt sätt, de förstod innebörden av ekvationer bättre och de kunde representera okända kvantiteter med hjälp av variabelnotation. Det är dock viktigt att poängtera att den algebra som introduceras i grundskolans tidigare år måste vara anpassad till barn.

”Big ideas” – en klassificering av skolalgebran

Ett annat ämne som intresserat forskare inom algebradidaktik är att försöka identifiera och kategorisera algebrans olika delområden. Om vi håller oss till skolalgebran så ger Blanton följande exempel på en kategorisering av fem så kallade ”big ideas”:

1. ekvivalenser, uttryck, ekvationer och olikheter
2. funktionslära
3. variabler
4. proportionalitet
5. generaliserad aritmetik.

Den första kategorin inkluderar bland annat likhetstecknets betydelse, att förstå matematiska relationer och att kunna resonera kring uttryck och ekvationer. Ett exempel på en uppgift är att kunna lösa och resonera kring likheten $8+5=\_\_+4$. Den andra och tredje kategorin handlar om funktioner och variabler och inkluderar bland annat att kunna konstruera och läsa av tabeller, identifiera såväl mönster som funktionsregler och kunna beskriva dessa med ord samt förstå vilken roll variabler kan ha i olika matematiska kontexter. Den fjärde kategorin handlar om att kunna se när två kvantiteter är proportionella mot varandra och kunna ge exempel på och resonera kring proportionella samband. Slutligen i den femte kategorin, generaliserad aritmetik, fokuseras det på strukturer och relationer som uppkommer inom aritmetiken. Detta kan handla om olika räknelagar som exempelvis kommutativa, associativa och distributiva lagen men också att man inom aritmetiken undersöker kvadrat- och kvadreringsreglerna som vi visar i kommade exempel 2 och 3.

Som en del av vårt projekt undersöker vi för närvarande vilken sorts algebra som kännetecknar den svenska skolmatematiken. Bland annat har vi börjat analysera grundskolans kursplaner och matematikläroböcker där vi som analytiskt verktyg har använt just Blantons ”big ideas”. Resultatet hittills visar att de fyra första mer eller mindre alltid är och har varit välrepresenterade i såväl svenska kursplaner som i svenska läroböcker. Betoningen på funktioner och variabler har stärkts med tiden vilket man till exempel kan se i den senaste kursplanen i matematik från 2011 där ”Samband och förändring”, som tidigare varit utspritt över olika områden av matematiken, lyfts fram som en egen kategori. Detta är inte någon tillfällighet utan följer en internationell trend där ”study of change” bland annat har identifierats som ett nyckelområde i PISA:s ramverk över skolmatematik. När det gäller den femte kategorin, generaliserad aritmetik, så är den starkt underrepresenterad inom den svenska skolalgebran, speciellt under de tidigare skolåren. Detta skriver vi fram i ett paper som presenterades på NORMA 17. Vad detta beror på är svårt att säga men förmodligen kan det vara så att den helt enkelt inte tillhör den utbildningstradition inom skolalgebra som vi är vana vid att hålla oss till i Sverige. Exempelvis förekommer inte termerna generalisera eller generalisering i den nuvarande kursplanen i matematik för grundskolan.

Generaliserad aritmetik handlar om att kunna resonera kring operationer och egenskaper hos olika tal. Mera specifikt handlar det om att kunna se den underliggande matematiska strukturen bakom beräkningar med specifika tal genom att identifiera generella mönster i aritmetiken. Istället för att fokusera på resultatet av $3+2=5$ kan elever redan i de tidigare skolåren börja tänka på olika egenskaper som uppkommer när tal adderas. Exempelvis vilka utfall som kan uppkomma när man adderar olika kombinationer av udda och jämna tal: udda + udda = jämn, jämn + jämn = jämn, udda + jämn = udda, jämn + udda = udda, som i exempel 1 nedan. Istället för att tänka på enskilda exempel av additioner mellan udda och jämna tal kan eleverna bygga upp ett algebraiskt tänkande genom att de får i uppgift att upptäcka ett mönster hos resultaten av additionerna mellan udda och jämna tal. När eleverna kan förklara mönstret och förstår varför mönstret stämmer för godtyckliga par av udda och jämna tal har de lyckats med att generalisera aritmetiken. Detta kan ta tid men enligt flera forskare är det viktigt att påbörja processen med att generalisera så tidigt som möjligt. Ibland brukar man betrakta generaliserad aritmetik som en bro mellan aritmetik och algebra. För att få en mer konkret förståelse för vad generaliserad aritmetik kan innebära ger vi tre exempel ämnade för olika årskurser.

Exempel 1

Följande exempel riktar sig mot de tidigare skolåren och behandlar paritet. Tanken är att eleverna ska argumentera för sina slutsatser kring udda och jämna tal till exempel med hjälp av "hopp" på tallinjen. I vår läromedelsanalys var den här typen av uppgifter näst intill obefintliga.

Udda och jämnt

a. Addera två udda tal. Blir summan udda eller jämn?
b. Addera två andra udda tal. Blir summan udda eller jämn?
c. Undersök fler summor av två udda tal. Vilket mönster ser du?
d. Förklara varför det du upptäckt alltid gäller.
e. Om du adderar ännu fler udda tal, kanske 3, 4, 5 eller till och med ännu fler, kommer summan då att bli udda eller jämn? Vad är det egentligen som gör att summan blir udda eller jämn?

Idén bakom uppgiften är att eleverna ska upptäcka att addition med ett udda tal byter paritet, det vill säga om vi adderar ett jämnt tal med ett udda tal blir summan ett udda tal. Vi har alltså bytt paritet från jämnt till udda. Som alternativ till uppgiften skulle eleverna kunna få upptäcka att addition med ett jämnt tal inte ändrar talets paritet. Det skulle vara enklare för barnen att genomföra men kanske inte lika spännande eftersom upptäckten blir att ingenting ändras. Genom att eleverna själva får sätta ord på upptäckten övergår eleverna från en aritmetisk kontext till en mer generell kontext. Denna övergång är ett exempel på det Blanton kallar för generaliserad aritmetik. Målet är inte att eleverna måste utföra ett formellt bevis; de ska lära sig att sätta ord på samband de upptäcker samt se om det är möjligt att generalisera sambandet. Vi själva skulle vilja benämna detta som att "leka med matten", bara ha kul och upptäcka olika regler, samband eller mönster.

Paritet

Paritet är en tvåvärd egenskap, till exempel udda eller jämna tal, positiva eller negativa tal, svarta eller vita rutor på ett schackbräde etc.

Exempel 2

Följande exempel riktar sig till årskurs 9 och leder fram till konjugatregeln och kvadreringsreglerna.

Konjugat- och kvadreringsreglerna
Betrakta följande sex uttryck:

$(5+3)\cdot(5+3)$	$(5+3)\cdot(5-3)$	$(5-3)\cdot(5-3)$
5^2-3^2	$5^2+3^2+2\cdot5\cdot3$	$5^2+3^2-2\cdot5\cdot3$

a. Beräkna värdet av varje uttryck.
b. Vilka uttryck har samma värde?
c. Byt ut talen 5 och 3 mot andra tal och beräkna de nya uttryckens värden.
d. Vilka uttryck har nu samma värde?
e. Vilka mönster tyder detta på?
f. Formulera detta med hjälp av algebraiska uttryck.

Avsikten med det här exemplet är att hjälpa eleverna att tänka i en riktning som gör att de lättare kan förstå konjugatregeln och kvadreringsreglerna. Ofta introduceras dessa regler direkt med bokstäver vilket kan leda till att eleverna uppfattar reglerna som krångliga och abstrakta. Eftersom skolans algebra och aritmetik bygger på samma grundläggande tankar och strukturer är det fördelaktigt att låta eleverna upptäcka mönstren bakom reglerna samt beskriva dessa med egna ord och/eller formler. Genom att låta eleverna få leka med talen och på egen hand beskriva det de upptäcker blir det lättare för dem att se hur algebran är uppbyggd. Efter att eleverna själva har fått upptäcka reglerna kan hela klassen tillsammans med läraren hjälpas åt att formulera ett strikt matematiskt bevis. Exempel 2 är därmed tänkt att fungera som en bro mellan aritmetiskt och algebraiskt tänkande, eller med andra ord som generaliserad aritmetik.

Exempel 3

Ett alternativ till de uppgifter i exempel 2 som introducerar första kvadreringsregeln är att utgå från den traditionella skriftliga uppställningen för multiplikation. Även andra skriftliga uppställningar, till exempel jalusimetoden, kan användas för detta syfte.

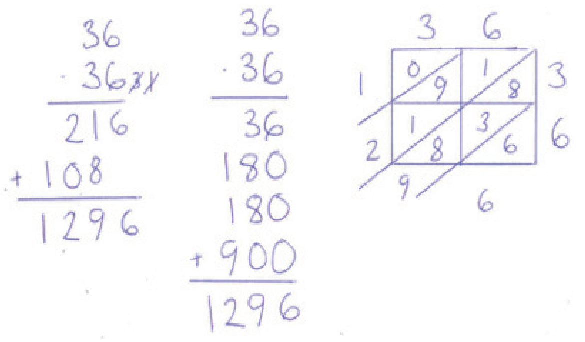
Första kvadreringsregeln
Beräkna för hand, det vill säga med skriftlig uppställning, kvadrattalet $36\cdot36$.

a. Du har utfört fyra multiplikationer. En av dessa är $30\cdot6$. Vilka är de övriga tre? Förekommer någon beräkning mer än en gång?
b. $36\cdot36$ är summan av dessa fyra multiplikationer. Fyll i luckorna i följande likhet:

$$(30+6)\cdot(30+6)=\_\_\_\cdot\_\_\_+\_\_\_\cdot\_\_\_+2\cdot\_\_\_\cdot\_\_\_=\_\_\_^2+\_\_\_^2+2\cdot\_\_\_\cdot\_\_\_$$

c. Beräkna några fler kvadrattal. Skriv ned dessa på samma sätt som i b.
d. Uttryck det mönster du ser med hjälp av algebraiska uttryck.

När eleverna räknar med hjälp av multiplikationsalgoritmen, till exempel någon av



kan det vara svårt att se strukturen bakom multiplikationen. I deluppgift a är tanken att eleverna ska upptäcka vilka beräkningar som ingår i multiplikationsalgoritmen, till exempel att man multiplicerar 6 *ental* med 3 *tiotal* vilket är $6 \cdot 30 = 180$. I deluppgift b vill vi att eleverna förstår att de fyra multiplikationerna summeras. Det som kan ha varit en magisk algoritm för eleverna bryts därmed ned i sina olika beståndsdelar. Genom att i uppgift b, och senare i uppgift c, explicit skriva ut ”upphöjt till 2” på två av termerna samt $2 \cdot \_\_ \cdot \_\_$ som en tredje term leder vi in eleverna i mönstret bakom första kvadreringsregeln.

Både andra och tredje exemplet handlar om att få bättre förståelse för konjugatregeln och kvadreringsreglerna men det finns en väsentlig skillnad mellan dem. I exempel 2 får eleverna upptäcka att vissa av de givna uttrycken har samma värde medan i exempel 3 låter vi eleverna bygga vidare på något som de redan kan, i detta fall multiplikationsalgoritmen. I båda fallen leker vi med tal, dock på olika sätt, för att få ett mönster att framträda. Exempel 3 har fördelen att eleverna, förutom att upptäcka första kvadreringsregeln, även får upptäcka vad som ligger bakom multiplikationsalgoritmen.

LITTERATUR

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39–87.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87–115.

Hemmi, K., Bråting, K., Liljekvist, Y., Prytz, J., Madej, L., Pejlare, J., and Palm Kaplan, K. (2017). *Characterizing Swedish school algebra – initial findings from analyses of steering documents, textbooks and teachers' discourses.* Paper presented at the 8th Nordic Conference on Mathematics Education, NORMA 17, Stockholm.

Katz, V. & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications from teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 185–201.