

Ibland faller talen bara på plats

På Matematikbiennalen i Umeå erhöll författarna till denna artikel Nämnarens resestipendium för bästa idéutställning. De presenterar här sitt arbete med att låta elever i årskurs 7–9 möta spännande matematik genom skönlitteratur.

En påsk för tre år sedan låg *Sifferdjävulen* i shopen på Universeum i Göteborg. Det blev starten för ett arbete med den boken på Helenelundsskolan i Sollentuna. Flera matematiklärare läste boken tillsammans med sina grupper. Två år senare fick vi tips om en annan bok med matematikinnehåll, *En gåtfull vänskap*. En önskan om att få åka till matematikbiennalen i Umeå födde ett samarbete mellan oss båda som annars varken delar klasser eller årskurser. Tanken att kunna använda skönlitterära böcker som en del i en varierad matematikundervisning kom och idén att vi kanske kunde läsa en skönlitterär bok per årskurs. Vi började arbeta mer målmedvetet med läsning av böckerna i våra grupper och vi tog fram uppgifter och diskussionsunderlag för att kunna presentera det på biennalen.

Helenelundsskolan är en kommunal skola med bred upptagning. I varje undervisningsgrupp på 20 elever i åk 7–9 har vi idag mellan två och åtta modersmål. Vi tycker det är viktigt att jobba med språkutveckling från de olika utgångslägena. Att använda skönlitteratur i matematikundervisningen kan bli en naturlig del i elevernas språkutveckling. Eleverna behöver också lära sig om olika genrer, det är skillnad på att läsa en skönlitterär bok och att ta sig an språket i en matematiklärobok.

Estetiska värden

Arthur Benjamin menar att *matematik lär vi oss för att kunna kalkylera, lösa uppgifter och inspireras*. I de skönlitterära böckerna är matematiken framskriven för att vi ska inspireras och förflytta våra tankar utanför våra vardagsramar då vi kalkylerar och löser problem. I Lgr II kan vi exempelvis läsa att *matematiken utvecklas så väl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. [...] Matematiken ska också ge eleverna möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband samt att undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang*. I kunskapsbedömningen har vi hittills provat att bedöma *elevens förmåga att redogöra för och samtala*



om tillvägagångssätt. Det är dessa delar som vårt arbete handlar om och utifrån stödet i läroplanen har vi jobbat med att hitta en modell för hur vi ska få in böckerna i den vardagliga verksamheten utan att det blir en enskild händelse, happening, utan lärande. Vi jobbar med böckerna så att de passar in i den ordinarie undervisningen för att komplettera, repetera, inspirera eller introducera, beroende på var gruppen befinner sig i sitt lärande och vilket fokus vi för tillfället har på undervisningen. Vi anser att det är bra för alla elever att delta och att utmaningen i de uppgifter som finns i böckerna och de uppgifter som vi har plockat fram till varje kapitel räcker för att skapa den bredd som behövs för att kunna utmana på alla nivåer.

Om lektionerna

En lektion kan se olika ut beroende på klassrumsklimatet. Vi upplever att en del elever fångas mest av själva berättelsen medan andra lockas mer av matematiken. Det går lika bra att eleverna lyssnar när läraren läser som att de har stoffläsning eller att de har läst tills de kommer till lektionen. Hur vi sedan bearbetar texten beror på hur vi läst. Vi börjar alltid med att reflektera över vad texten har handlat om och får då en gemensam bas. Det är viktigt att lyssna på vad eleverna berättar och om de har missuppfattningar som skapar problem för förståelsen. Nästa steg blir att eleverna i mindre grupper försöker upprepa och förklara textens matematiska tankegångar med egna ord. Vi använder oss då av en slumpgenerator för att gruppera eleverna medan vi vid mer utmanande uppgifter delar in i grupper utifrån vad de vill undersöka. Till vissa kapitel finns det uppgifter att jobba vidare med och det är lämpligt att stanna kvar ett antal lektioner för att lägga in ytterligare övningar som hör till den matematiska tanken i kapitlet. Vi har lärt oss att det är bättre att låta eleverna lämna lektionen utan att ha ett svar på uppgiften, för att få fortsätta tänka på problemet under nästa lektion, än att stressa igenom en förklaring för att eleverna ska ha ett svar med sig när de lämnar lektionen. Vi känner att förståelsen för problemet ökar och att de faktiskt fortsätter att prata om problemet hemma.

En lektion

Idag ska eleverna i åk 8 få träna på delare och att dela upp tal i faktorer. De ska också ges möjlighet att fascineras över hur tal kan höras samman samt få sig en dos matematikhistoria. Som en extra bonus kommer vi att stöta på "roten ur" samt föra en diskussion om vackra bevis.

Vi ska börja läsa boken *En gåtfull vänskap*. Inledningsvis blir det högläsning ur bokens första kapitel. Eleverna får stifta bekantskap med huvudpersonerna, matematikprofessorn med 80-minutersminne, hans hemhjälp och hemhjälpens son. Mitt i ett stycke bryter vi – frågan om vad talen 220 och 284 säger oss hänger i luften.



Jag frågar eleverna: – *Vad säger er talen 220 och 284?* Snabbt svarar de:

- *Det är jämna tal!*
- *Båda är något med två hundra!*
- *Båda har tre siffror!*
- *Nästan lika stora!*

Svaren föranleder oss att diskutera vad ett jämnt tal är, siffrornas värde i olika tal och vad det innebär att tal är nästan lika stora. Det blir en repetition för många elever.

Vi läser vidare i boken och upptäcker att en av huvudpersonerna har tänkt på samma sätt som vi. Vid nästa stopp uppmanas eleverna att skriva ner alla positiva heltalsdelare till talen 220 och 284, förutom talen själva. Först har vi en diskussion om vad positiva heltalsdelare är. Positiva är alla med på vad det är men alla är inte helt säkra på vad ett heltal är, och delare – det är det flera som undrar över. Det blir en givande diskussion.

Eleverna börjar med att försöka hitta alla positiva heltalsdelare till 220. Först jobbar de enskilt, sedan i par och slutligen i helklass. Frågor ställs om vilken strategi de använde och vad de har upptäckt.

- *Vi provade med en massa olika tal, säger en elev.*
- *Om man delar 220 med 10 så är det lika med 22. Då kan man ju också dela 220 med 22, säger en annan elev.*
- *Aha, så man kan hitta dem parvis?, tänker jag högt.*
- *Vi hittade att både 1 och 11, 2 och 22, 4 och 44 är delare till 220, reflekterar en tredje elev.*

Eleverna får göra om samma sak med talet 284. Tillsammans skriver vi sedan på tavlan:

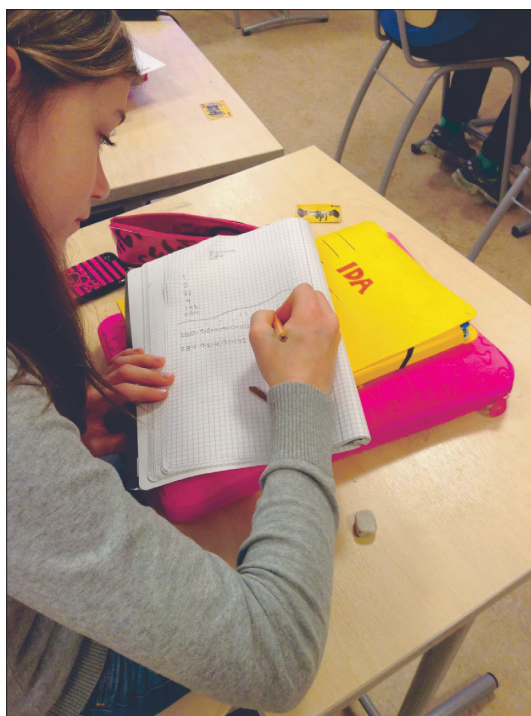
220 har delarna 1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110
284 har delarna 1 2 4 71 142

Nu ska vi egentligen läsa vidare ett litet stycke men redan nu går det upp ett ljus för en elev som utropar – *Aha, ja!*

Vi utbyter en hemlighetsfull blick, han fortsätter att räkna men avslöjar inte vad han upptäckt. När vi läser vidare uppmanas vi att addera alla delarna till respektive tal. Eleverna blir ivriga och börjar genast räkna. Efter hand kommer kommentarerna:

- *Aha.*
- *Coolt.*
- *Nä, är det sant?*

När vi kommer till slutet av kapitlet får vi veta att detta kallas för *vänskapliga tal* och att de är mycket sällsynta. Vidare får vi veta att Fermat och Descartes bara hittade ett sådant par var. Men vilka var Fermat och Descartes?



Visioner

Vi vill att resultaten för våra elever ska bli bättre. Vi ger dem möjlighet att påverka sin läshastighet och förhoppningsvis bli bättre än 29 ord per minut, som är minimum för att klara PISA-tester i matematik. Vi skapar uppgifter som tar tid att lösa och det ger eleverna större möjlighet att vara uthålliga i sitt lärande. Vi tycker oss se att elever får det lättare med matematiken då de ser hur mönster dominerar i de skönlitterära böckernas matematik. Framför allt tycker vi oss se detta hos elever som har svårt med talen mellan 0 och 1 när de förstår att det finns ett mönster bland de talen också.

Vi önskar samarbete med våra svensklärare och genom litteraturen ett för oss nytt fält för gemensamma teman. Vi tror också att det som matematiklärare är viktigt att ha många strängar på sin lyra, många färger på paletten eller många ingångar till matematiken. Att läsa skönlitterära böcker i matematikundervisningen kan vara en sådan sträng eller en sådan färg.

Om du har blivit intresserad, läs böckerna och gå in på vår hemsida där vi delar med oss av lektionsidéer och tips samt våra tankar om hur man kan arbeta med böckerna. Vi tar också tacksamt emot fler lektionstankar och förslag om fler böcker med bra matematikinnehåll.

www.korta.nu/wp6

LITTERATUR

Enzensberger, H. M. (2001). *Sifferdjävulen – en bok att stoppa under huvudkudden, för alla som är rädda för matematik*. Stockholm: Alfabet.

Ogawa, Y. (2011). *En gåtfull vänskap*. Falun: Bonniers.

En fråga om bråk

Ett bråk mindre än 1 kan beskrivas som $n/(n+1)$ där n är ett naturligt tal större än 0. Finns det en generell formel som anger ett tal mellan tex $1/2$ och $2/3$? Jag hittade formeln $2n + 1/2 (n+1) + 1 = 2n + 1/2n + 3$ som i så fall ger $3/5$ då $n=1$, vilket är ett av alla tal som finns mellan bråken ovan.

Svar: Först kanske det är viktigt att påpeka att det bara är vissa bråk mindre än 1 som kan skrivas $n/n+1$. Tolkar vi formeln ser vi att den kräver att nämnaren bara är 1 större än täljaren och det finns massor med bråk mindre än 1 som inte uppfyller det speciella kravet.

Mer generellt är att helt enkelt ta medelvärdet av de bråk det handlar om, vilka som helst. Har vi bråken a/b och c/d blir medelvärdet $(ad + bc) / 2bd$, vilket ibland kan förkortas.

En annan lite mer speciell metod (som man kanske inte ska visa sina elever) är att summera täljarna för sig och nämnarna för sig, vilket här skulle ge $(a + c) / (b + d)$. Detta är ju ett typiskt "elevfel" men resultatet kallas *mediant* och kan ha en viss användning. Formeln i frågan är just en beräkning av medianten (obs inte medianen) för den speciella typ av bråk som du utgår från:

$1/2$ och $2/3$ kan skrivas $n/(n+1)$ och $(n+1)/(n+2)$ för $n=1$. Medianten av dessa, dvs man räknar "fel", blir $(n + n+1)/(n+1 + n+2) = (2n+1)/(2n+3)$, dvs $3/5$ för $n=1$. Men generellt kan alltså medianten för a/b och c/d skrivas: $(a + c) / (b + d)$.



Om du vilja fördjupa dig i hur medianten kan användas, se länkar på Nämnaren på nätet.

Lars Mouwitz